

上海交通大学

SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY

学士学位论文

THESIS OF BACHELOR



论文题目 非线性光子晶体的设计及其在量子信息中的应用

学生姓名 陶 鑫

学生学号 5090309693

指导教师 何广强副教授

专 业 信息工程

学院 (系) 电子信息与电气工程学院

Submitted in total fulfilment of the requirements for the degree of
Bachelor
in Information Engineering

Design and Application of Nonlinear Optical Crystals and in Quantum Information

XIN TAO

Supervisor

Assoc. Prof. GUANGQIANG HE

DEPARTMENT OF ELECTRONIC ENGINEERING, SCHOOL OF ELECTRONIC INFORMATION
AND ELECTRICAL ENGINEERING
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY
SHANGHAI, P.R.CHINA

Jun. 16th, 2013

上海交通大学

毕业设计（论文）学术诚信声明

本人郑重声明：所提交的毕业设计（论文），是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

作者签名：_____

日期：_____年____月____日

上海交通大学

毕业设计（论文）版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权上海交通大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保 密 ，在 ___ 年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密 。

(请在以上方框内打“√”)

作者签名：_____

指导教师签名：_____

日 期：_____年 ___月 ___日

日 期：_____年 ___月 ___日

非线性光子晶体的设计及其在量子信息中的应用

摘 要

非线性光学现象是物理界光学研究的热点。它研究的是光强很高的情况下，介质中光束传播的情况。非线性光学过程能够实现光学参量转换，因而获得广泛的关注。在实际的应用中，非线性转换效率需要设计好的周期性极化的晶体实现准相位匹配来提高，而设计高效又实用的光子晶体便成为了难点。

本文的研究工作主要是分为三个方面，首先是阐述了一种通用的非线性光子晶体设计方法，并将其实现为能自动匹配任意多个参量过程的 MATLAB 程序，其正确性由仿真验证。其次是提出了一种多参量过程制备五方光子纠缠源的新方法，和对啁啾结构制备压缩双光子纠缠源过程的一种改进。最后是在 A. Harrow 等人工作的基础上，将量子相干信道的概念拓展到了多方的情况，并给出了实验可行的建立多方相干信道的两种方法。

关键词：非线性光学 准相位匹配 量子纠缠 光学参量过程 量子相干信道

Design and Application of Nonlinear Optical Crystals and in Quantum Information

ABSTRACT

Recently, nonlinear optics(NLO) has been one of the main research topics of Optics. It describes the propagation of light in nonlinear material when a pump light with high intensity is applied. The processes of nonlinear optics are typically used to achieve optical parametric conversion. However, the efficiency of the conversion is highly dependent on the design of periodic polarized crystals, and it is difficult to design practical crystals with high efficiency.

The research in this work consists of three parts: firstly, we illustrate a method about the common design of nonlinear optical crystals, and then implement a MATLAB program to automatically run the routine, which can be adapted to arbitrary number of parametric process. We validate our program by using a 1-dimension and a 2-dimension demonstration. Secondly, we propose a new method to generate 5-partite entangled states using multiple parametric processes, as well as an improvement to the generation of broadband biphoton using chirped structures. Thirdly, in the field of quantum communication, we extend the concept of coherent channel to multi-partite conditions, and establish two original schemes for experiments.

KEY WORDS: Nonlinear Optics, Quasi-phase Matching, Quantum Entanglement, Optical Parametric Process, Quantum Coherent Chan-

nel

目 录

第一章 概述	1
1.1 课题研究背景	1
1.1.1 非线性光学和量子光学	2
1.1.2 量子信息处理	3
1.2 课题研究目的和意义	3
1.3 本文的组织结构	4
第二章 非线性光学过程	5
2.1 非线性光学过程的波动方程描述	6
2.1.1 相位匹配与准相位匹配	9
2.1.2 光学参量过程	11
2.2 光学过程的量子描述	13
2.2.1 量子力学基本概念	13
2.2.2 电磁场的量子化	17
2.2.3 常见单模光学量子态	19
2.2.4 光学量子态的演化	21
2.2.5 光学量子纠缠	24
2.3 本章小结	24

第三章 非线性光子晶体设计方法的程序化实现及与 Comsol 联合仿真	25
3.1 非线性光子晶体设计方法	26
3.1.1 设计目标概述	27
3.1.2 设计方法原理简述	27
3.1.3 设计方法流程	28
3.1.4 程序化实现	32
3.2 应用前景	42
3.2.1 多参量过程提高频率转换效率	42
3.2.2 多方纠缠源制备	43
3.3 本章小结	43
第四章 非线性光子晶体的应用设计	44
4.1 基于参量下转换级联差频产生效应的五方纠缠源模型	44
4.1.1 光学过程及其哈密顿量	45
4.1.2 主方程、福克-普朗克方程及随机微分方程组	47
4.1.3 随机微分方程组的线性化求涨落解	50
4.1.4 纠缠判据及纠缠验证	51
4.2 基于啁啾结构非线性光子晶体的两方宽带纠缠源模型	53
4.2.1 啁啾结构及 Type-II 型自发参量下转换	54
4.2.2 海森堡方程近似解析解	56
4.2.3 时间相干性	58
4.2.4 一个仿真实例	60
4.3 本章小结	62

第五章 多方连续变量量子相干信道模型设计	64
5.1 经典信道、量子信道与量子相干信道	65
5.2 多方连续变量量子相干信道	66
5.2.1 多方连续变量量子相干信道的定义	66
5.2.2 多方连续变量量子相干信道的实现	69
5.3 多方连续变量量子相干信道的应用	77
5.4 本章小结	77
第六章 全文总结	78
参考文献	80
致谢	84

插图索引

3-1 光子晶体微观图像	25
3-2 准晶体结构示意图	27
3-3 晶格和基本图案卷积示意图	29
3-4 一维设计实例双格图	35
3-5 一维设计实例晶体示意图	35
3-6 一维设计实例晶体图	36
3-7 一维设计实例频谱图 -占空比 (100%,0%,0%)	36
3-8 一维设计实例频谱图 -不同占空比对比	37
3-9 二维设计实例 -光学过程	38
3-10 二维设计实例双格图	40
3-11 二维设计实例晶体图	41
3-12 二维设计实例频谱图	41
3-13 多参量过程提高频率转换效率	42
4-1 多参量过程制备五方纠缠源	45
4-2 五方纠缠判据	53
4-3 啁啾空间结构示意图	55
4-4 时间相干性的测量	59
4-5 啁啾结构实例输出光频谱	61
4-6 啁啾结构实例时间相干	62

5-1 基于 GHZ 纠缠态和经典信道辅助的相干信道实现	70
5-2 基于 EPR 纠缠对相干信道实现 -配置一	74
5-3 基于 EPR 纠缠对相干信道实现 -配置二	75

第一章 概述

1.1 课题研究背景

历史上，光 (light) 在整个物理学中一直占据着一个不可取代的独特地位。光学的每一次发展都带来了人类对物理世界认识的变革。尤其是被称为现代物理学支柱的量子力学和相对论，其起源都与各种光学现象有关，如：黑体辐射 (black-body radiation)、光电效应 (photoelectric effect)、光速不变原理 (principle of constancy of light velocity) 等。

近几十年来，通信、信息和计算科学飞速发展，通信设备和计算机几乎融入了人们生活的方方面面。目前主流的计算机设备是基于电子技术的相关原理，主流的通信技术也是基于电信号 (网线等) 或者是微波信号 (无线) 的传播。随着对计算性能要求越来越高，对通信的安全保密性和速率的要求越来越苛刻，电子计算机设备和传统的电通信方式显得有些力不从心。

人类历史上很早就使用光作为传递信息的方式，例如几千年前的古代中国就使用烽火台来传递战报。然而真正意义上的现代光通信是很久之后才发展起来，这首先是因为人们很难像控制电信号那样精确的操控光束的频率、强度、波形等，另一方面是由于难以获得适合光纤传播的媒介。直到激光器的产生和损耗低的光纤的发明，才使利用光进行通信称为了可能。

光是一种频率很高的特殊电磁波。激光器产生的光具有的强度高、频率稳定的特性，吸引了通信研究者的目光。经过几十年的努力，光纤通信已经成为一项比较成熟的技术。

然而，光本身还具有另外一些更神秘的性质：例如在高强度光照射下产生

的非线性效应，及其产生的频率转换作用；还有光本身所具有的波粒二象性 (wave-particle duality)。之前的光通信应用中，利用的是光的线性效应和波动特性。当把光作为量子理论中的光子 (photon) 理解时，会有自旋角动量 (spin angular momentum)、正则量 (quadrature) 等经典物理中没有的新自由度，并产生量子纠缠 (quantum entanglement) 等经典物理中无对应的新现象。充分研究和利用这些神奇的新现象，无疑可能在计算和通信领域中挖掘出其独特的作用。

许多研究者们已经将目光和精力投入到非线性光学和量子信息领域，并获得的大量成果。本文的工作也是围绕这两个主题，在前人工作的基础上做出了一些拓展。

1.1.1 非线性光学和量子光学

一般认为，可以把光学分成三类：几何光学，物理光学，量子光学。几何光学研究的是光的传播问题，利用光的折射、反射定律等，把光的传播当做是几何问题；物理光学研究的是光线的物理本质，它一般从波动理论的角度出发，用麦克斯韦方程组来探讨光的衍射、干涉、偏振等现象；量子光学以电磁场的量子化为基础，用量子理论来研究光学现象，是对光学用另一种方式重新描述。

本文我们的重点之一的非线性光学 (nonlinear optics) 属于物理光学的范畴。它研究的是在光强达到一定程度后，介质的性质随着外加光场改变，介质中的光场不再满足线性叠加性的情况。非线性光学原理通常用来实现频率转换和产生具有联系的多方过程。

非线性频率转换过程一般用加工过的光子晶体实现，而通常的周期性极化 (periodic polarized) 晶体能同时匹配的参量过程很少，效率也不高。有学者提出一种通用的非线性光子晶体设计方法^[1]，本文基于此方法的改进，实现了一个能自动设计和分析的程序。

此外，利用这一晶体设计方法，作者设计了两个利用非线性光学技术的模型：一个是基于多参量过程的五方纠缠源模型，另一个是基于啁啾结构的宽带纠缠源模型。

量子光学是另一种看待光现象的角度。本文在定量分析纠缠和相干性质时，使用了量子光学的描述语言进行分析。

1.1.2 量子信息处理

量子信息处理技术一直是学者们研究的热点。其中很多理论和技术已经相当成熟，例如：量子密钥分发 (quantum key distribution)、量子隐形传态 (quantum teleportation) 等。

传统的信道称为经典信道，量子通信信道称为量子信道。而 A. Harrow 等学者提出一种介于两者之间的相干信道^[2]。这种信道在效率和功能上具有一些独特的优势。本文作者在其基础上进行了拓展，研究了多方 (multi-partite) 情况下的连续变量相干信道，我们给出了这种信道严格的定义，并给出了两种实现过程的示意图，并分析了其中噪声的影响。

1.2 课题研究目的和意义

本文的研究主要分成了三个较为独立的部分。

第一个是对通用非线性光子晶体设计方法的优化及其程序化实现。这个工作能够针对任意多个参量过程实现一维、二维晶体的自动化设计，在实际实验和研究工作中，都具有很重要的参考意义。实验室已经有多篇论文基于本方法的仿真结果发表。

第二个是利用非线性光学原理和设计方法设计了两个应用模型。一个是五方纠缠源模型，纠缠源是量子通信和研究中不可缺少的材料，高产生率、易制

备的多方纠缠源能大大提高实验和研究效率。另一个是宽带双光子对模型，它对现有方法进行了改进，使出射光子对更易分离，宽带双光子对具有极小的相干时间(飞秒量级)，因此能够以更高地精度进行时间的标定或者是距离的测量。

第三个是拓展了相干信道的概念，使之适用于多方情形。相干信道是一个新提出的概念，对其进行多方拓展之后，为进一步的研究工作打下基础，也使其更适用于实践。

1.3 本文的组织结构

本文的正文一共分为五个章节，每个章节的内容安排如下：

第一章是概述，阐述了课题的研究背景、研究的目的和意义、并介绍了全文的组织结构框架。

第二章是阐述了课题研究中涉及到的相关背景知识。该章节分成了两部分从波动理论和量子理论两个角度阐述了非线性光学效应。其中的讲解和论述都是作者根据多年实验室经历和学习多本教材重新整理组织而成，力求形成简明扼要而思路清晰的入门材料。

第三章阐述了一种通用的非线性光子晶体设计方法，对其进行了程序化实现，并用一维和二维的实例演示了效果。

第四章阐述了作者设计的两中非线性光学技术的应用：五方纠缠源模型和宽带双光子对模型。其中给出了实验制备的方案，并对其进行了定量的理论分析。

第五章阐述了量子相干信道的概念，对其进行了拓展，给出了多方连续变量相干信道的严格定义。文中提出了两种实现方法，并对噪声进行了分析。

最后一章对全文进行了总结，并展望了未来的研究方向。

第二章 非线性光学过程

我们都曾接触并在物理课程中学习过各种形形色色的光学现象，如：光的反射 (reflection)，折射 (refraction)，干涉 (interference)，衍射 (diffraction)，色散 (dispersion)，偏振 (polarization) 等。在这些物理现象中，光线有的是改变了其传播方向 (反射，折射等)，有的是改变了在介质中的传播速度 (折射，色散等)，有的是改变了其电场振动方向 (偏振)。然而，一束光线的频率 (frequency) 却始终一个不变量。光是一种特殊的电磁波，因此我们通常按照描述电磁波的方法，使用物理量电场强度 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ 的分布来描述一束光。在上述物理现象中，光所在的介质特性，如：折射率 (refraction index)，极化率 (susceptibility)，均与这束光的强度 (intensity) 无关。在多束光波重叠时，它们各自按照单束光时的方式独立传播，互不干扰，满足线性叠加原理： $\mathbf{E}_{sum}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) + \cdots + \mathbf{E}_n(\mathbf{r}, t)$ 。这也就是线性光学得名的原因。

随着物理学的发展，尤其是激光器的产生，得到强度高、相干性好的光束成为了可能。在这样的光源中，光波的电场强度甚至达到了光介质原子内部的库伦电场的量级。此时，介质的性质便会随着光的强度而改变。多束光作用时，介质性质已经和单束光独立作用时不同，不会再遵循线性叠加原理，非线性特性产生。

2.1 非线性光学过程的波动方程描述

光是一种电磁波，在不涉及量子的经典情况下，可以完全由麦克斯韦方程组 (Maxwell's equations) 描述：

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2-1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2-2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2-3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2-4)$$

其中， \mathbf{E} 、 \mathbf{D} 、 \mathbf{H} 、 \mathbf{B} 分别是电场强度、电位移、磁场强度、磁感应强度。 ρ 、 \mathbf{J} 分别是体电荷密度和面电流密度。电位移 \mathbf{D} 有关系式：

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2-5)$$

电极化强度 \mathbf{P} 描述了介质在外加电场 (光场) 的作用下，介质发生极化的程度。通常情况下，外加电场的强度比较小，可以近似认为：

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E} \quad (2-6)$$

其中， ε_0 为真空介电常数 (permittivity)， $\chi^{(1)}$ 称为 (一阶) 电极化率 (susceptibility)。在光场强度很大 (\mathbf{E} 很大) 时，上述线性近似不再适用，电极化强度 \mathbf{P} 关于电场强度 \mathbf{E} 的高阶项增大到不可忽略，因此有含高阶项的完整形式：

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi^{(2)} \mathbf{E}^2 + \varepsilon_0 \chi^{(3)} \mathbf{E}^3 + \dots = \mathbf{P}^{(1)} + \mathbf{P}^{(2)} + \mathbf{P}^{(3)} + \dots \quad (2-7)$$

这里是一种简化的模型，实际中的光介质很可能是各向异性 (anisotropic) 的，上式中 \mathbf{P} 、 \mathbf{E} 均为三维矢量，因此完整表述的 $\chi^{(i)}$ 应当是一个张量 (tensor)；又因介质材料可能有色散，即 $\chi^{(i)}$ 是光场频率的函数；此外，直接写矢量 \mathbf{E} 的高阶幂也会引起误解。为简化起见，这些因素均不考虑 (介质具有各向同性，无色散)，且矢量 \mathbf{P} 、 \mathbf{E} ，只有一个方向，用标量 P 、 E 代替。

式2-7中， $\chi^{(2)}$ 称为二阶非线性极化率 (second-order susceptibility)， $\chi^{(3)}$ 为三阶极化率。通常我们只考虑由它们产生的二阶或者三阶非线性光学效应，更高阶的非线性系数非常小，即使在激光的光强下也可以忽略。令 $P^L = P^{(1)}$ 表示极化率的线性部分； $P^{NL} = P^{(2)} + P^{(3)} + \dots$ 为非线性部分。

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}^L + \mathbf{P}^{NL} = \mathbf{D}^L + \mathbf{P}^{NL} \quad (2-8)$$

由于我们研究的是光在介质中传播，因此介质中没有自由电荷和自由电流，即： $\rho = 0$ ， $\mathbf{J} = 0$ 。同时，我们假设通常使用的光介质是无磁性的： $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ ，其中 μ_0 为真空磁导率 (permeability)。对方程2-3两边取旋度，并利用矢量恒等式 $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ ，代入式2-4得到：

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} &= \nabla \times \left(-\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \\ \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{H}) \\ \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial^2 (\mathbf{D}^L + \mathbf{P}^{NL})}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2-9)$$

通常研究的情况下，假定光是平面波且为横电波，可以近似认为 $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ 关

系成立^[1, 3], 故有:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}^{NL}}{\partial t^2} \quad (2-10)$$

其中 $\varepsilon = \varepsilon_0(1 + \chi^{(1)})$. 这就是描述非线性光学过程的波动方程形式。此处的 \mathbf{E} , \mathbf{P} 都是介质中总的光电场和总的极化强度, 即许多单频光场的叠加。考虑到其中的某一束单频光, 并假设光沿着 z 轴传播, 我们表示为:

$$\mathbf{E}_n(z, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_n(z)e^{i(k_n z - \omega_n t)} + c.c.) \quad (2-11)$$

$$\mathbf{P}_n^{NL}(z, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_n^{NL}(z)e^{i(k'_n z - \omega_n t)} + c.c.) \quad (2-12)$$

代入方程2-10, 利用公式 $k_n^2 = \mu_0 \varepsilon_n \omega_n^2$, 得到:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}(z)}{\partial z^2} + 2ik_n \frac{\partial \mathbf{A}_n(z)}{\partial z} = -\mu_0 \varepsilon_0 \omega_n^2 \mathbf{P}_n^{NL}(z)e^{i(k'_n z - k_n z)} \quad (2-13)$$

再应用慢变包络近似^[1], 即认为近似满足: $|\frac{\partial^2 \mathbf{A}(z)}{\partial z^2}| \ll |k_n \frac{\partial \mathbf{A}_n(z)}{\partial z}|$, 忽略二阶偏导项, 整理后得到:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_n(z)}{\partial z} = \frac{i\omega_n}{2\varepsilon_0 c n(\omega_n)} \mathbf{P}_n^{NL}(z)e^{i(\Delta k z)} \quad (2-14)$$

其中, $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ 为真空光速。 $n(\omega_n)$ 为介质的折射率, 是频率的函数。 $\Delta k = k'_n - k_n$ 称为波矢失配量 (wavevector mismatch), 是某个相同频率对应的极化强度波矢量与电场波矢量的差值。

2.1.1 相位匹配与准相位匹配

考虑一个简单的情况：只关心光介质的二阶非线性效应；这里光是平面波且是横电波，电场只沿一个方向振动；入射光只有一个频率 ω_1 ，其各个物理量用下标 1 表示。由于极化强度平方项存在，晶体中会存在入射频率的倍频项 $2\omega_1$ 的光，用下标 2 表示。满足耦合的波动方程组：

$$\begin{cases} \frac{\partial A_2(z)}{\partial z} = \frac{i2\omega_1}{2cn(2\omega_1)}\chi^{(2)}A_1^2e^{i(\Delta kz)} \\ \frac{\partial A_1(z)}{\partial z} = \frac{i\omega_1}{2cn(\omega_1)}\chi^{(2)}A_2A_1^*e^{i(-\Delta kz)} \end{cases} \quad (2-15)$$

此时波矢失配量 $\Delta k = k_2 - 2k_1$ ，由于介质色散的存在， $n(\omega_1) \neq n(2\omega_1)$ ，故 $\Delta k \neq 0$ 。由于非线性转换效率很低，输入强度很高的 ω_1 光只有很少一部分转换成 $2\omega_1$ 的倍频光。于是，在求解上述方程组时，可以近似假定 A_1 基本不变，即 $A_1(z) = A_1(0)$ 。于是可以求得复振幅和光强：

$$A_2(z) = -\frac{\omega_1}{cn(2\omega_1)\Delta k}\chi^{(2)}A_1^2(0)(e^{i(\Delta kz)} - 1) \quad (2-16)$$

$$I_2(z) = \frac{1}{2}\varepsilon_0cn(2\omega_1)|A_2(z)|^2 = \frac{2\omega_1^2[\chi^{(2)}]^2I_1^2(0)z^2}{c^3n^2(\omega_1)n(2\omega_1)\varepsilon_0} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta kz}{2}\right) \quad (2-17)$$

由倍频光强度公式，我们可以看出，由于波矢失配量 $\Delta k \neq 0$ ，倍频光强度是震荡的。只有当 $\Delta k = 0$ ，倍频光才有很好的输出强度。补偿波矢失配量 Δk 的过程就叫做相位匹配 (phase matching)。

相位匹配的常见方法有：角度匹配和温度匹配。角度匹配^[3]通常利用部分晶体的双折射 (birefringence) 特性。对于一块双折射晶体，光线在晶体中传播的速度和对应的折射率与光的偏振方向有关。当光入射到这种晶体表面时，发生两个不同方向的折射，其中一束折射光遵循折射定律，称为寻常光或 o 光 (ordinary ray)，另一束不遵循折射定律的称为非常光或 e 光 (extraordinary ray)，

这两束光对应方向的折射率不同, $n_e(\omega) \neq n_o(\omega)$ 。因此完全有可能使入射光取特殊的角度, 让非线性过程中的各束光处在不同的 e, o 光种类下, 利用其折射率的差异, 实现 $\Delta k = 0$ 。温度匹配^[3]是通过改变晶体所处的温度。描述晶体折射率的谢米尔方程 (Sellmeier equation) 是一个关于材料温度和光的频率的非线性函数, 通过代入到失配量公式中计算, 可能找到使失配量为 0 的特殊问题。

上述两种方法, 能够真正实现 $\Delta k = 0$, 达到最佳的输出效率, 因此又被称为完美相位匹配 (perfect phase matching)。缺点是对实验条件 (角度、温度) 的控制非常苛刻, 而且选定的实验方案只能适用于一个特定的光学过程, 一旦光学过程改变, 实验条件需要重新选定。

我们可以从另一种定性的方式来更容易的理解: 非线性光学过程的波动方程中, 极化强度项在右侧, 相当于能激励出电场的产生。因此, 极化强度中出现的频率成分, 会激发出相应频率的电场 (光场)。对于二阶非线性过程, P^{NL} 包含了介质中某两束光正频率相乘项 $\chi^{(2)} A_1 A_2 e^{i[(k_1+k_2)z-(\omega_1+\omega_2)t]} = \chi^{(2)} A_1 A_2 e^{i(k_x z - \omega_x t)}$, 而由于色散, $k_x \neq \frac{n(\omega_x)\omega_x}{c}$, 即 k_x 、 ω_x 并不是能够在此介质中传播的光的波矢量和频率。因此, 失配导致激发出来的成分不能很好地表现为光在晶体中传播。

用这种理解方式, 很容易说明另一种相位补偿技术: 准相位匹配 (QPM, quasi phase matching)。这种方法的思想是调制 $\chi^{(2)}$, 使其随空间位置周期变化 (令周期为 Λ), 成为 $\chi^{(2)}(z)$, 这样对其傅里叶展开后:

$$\chi^{(2)}(z) = \sum_m B_m e^{iG_m z} \quad (2-18)$$

$$B_m = \frac{2}{m\pi} \sin \frac{m\pi}{2}, \quad G_m = \frac{2\pi m}{\Lambda} \quad (2-19)$$

通过设计, 使某一个 G_m 正好等于 Δk , 则 P^{NL} 中的失配量可以被 G_m 所在项

匹配。这种匹配过程，只有 $\chi^{(2)}(z)$ 频谱分量中的一小部分项匹配，其余项不能实现匹配，故称为准相位匹配。但是由于傅里叶级数各项的函数正交性，以及实际实验中可以通过晶体的设计抑制其他分量作用于 P^{NL} 上的影响，理论和实验都能证明这种匹配仍有很好的效率^[1]。

准相位匹配技术成为了非线性光学频率转换应用中的主要方法，得益于其实验条件简便易行，对温度和入射角度等条件不敏感等优势。2000 年以来，准相位匹配技术吸引了许多研究者的兴趣，他们提出许多应用和改进方法。本文的设计内容也是基于准相位匹配技术实现的。

2.1.2 光学参量过程

在通信科学中，光的常用性质有：极化(偏振)，频率，相位，振幅(强度)，包络，空间位置，时间先后等。涉及到这些性质的改变，而介质本身所处量子态不改变的光学过程，称为光学参量过程^[1](optical parametric process)。过程前后，介质的量子态已经发生改变的过程称为光学非参量过程^[1](optical non-parametric process)，如拉曼散射 (Raman scattering)。本文主要研究光学参量过程。非线性光学过程通常用来实现频率转换，与此同时也能够实现偏振的改变等，由此研究者们拓展出一系列的应用。常见的光学参量过程有：

二次谐波产生 (SHG, second-harmonic generation) 上一小节的例子中已经提到，由于二阶极化率存在，会出现入射光的倍频项，即产生了二次谐波。

和频产生 (SFG, sum-frequency generation)：当入射光有多个频率成分时，极化强度二阶非线性会使两个频率光的正频率部分相乘，即频率相加，输出光中有两束光频率之和的新光束，产生了和频光。

差频产生 (DFG, difference-frequency generation) 当入射光有多个频率成分时，极化强度二阶非线性会使一束光的正频率部分与另一束光的负频率部分

相乘，即频率相减，输出光中有两束光频率之差的新光束，产生了差频光。

光学参量放大器 (OPA, optical parametric amplifier) 当一束光强很强的光和一束较弱的光——通常称为泵浦光 (pump light) 和信号光 (signal light)——一起射入二阶非线性介质中，泵浦光的能量会转移给信号光，并产生一个差频的闲置光 (idler light): $\omega_i = \omega_p - \omega_s$ 。这个过程实现了弱信号光的放大，故称为光学参量放大。

光学参量振荡器^[4](OPO, optical parametric oscillator) 将具有非线性性质的晶体放置在光学谐振腔 (optical resonator) 中，使该腔与信号光或者闲置光频率共振。此时，只需要打入一束较强的泵浦光，即可产生信号光和闲置光。腔的作用是使光在晶体中能多走若干来回，相当于增加作用距离，当需要的光增加到足够的强度才会从腔中出射出来。这一过程的发生需要满足泵浦光强度超过特定的数值，即泵浦阈值才能够发生。

自发参量下转换 (SPDC, spontaneous parametric down-conversion) 在量子的观点下，由于随机的真空涨落 (vacuum fluctuation) 激发，一个光子 (photon) 在非线性晶体中会分裂成两个低频光子，过程满足能量守恒。这一过程可以由泵浦光子，自发生成信号光光子和闲置光光子，产生的光子对通常具有纠缠特性。这一过程通常用来研究和制备纠缠光子。

除了上述光学过程外，研究者们进行了许多有益的拓展。如级联多个光学参量过程增加信号光产生效率^[5]，多参量过程级联的多方纠缠源 (multi-partite entanglement) 制备^[6] 等。

2.2 光学过程的量子描述

英国物理学家麦克斯韦 (James Clerk Maxwell) 用他的方程组建立起描述电磁场波动理论的完整框架——经典电动力学 (electrodynamics), 许多光学现象也得以用波动学的观点完美解释。然而, 经典波动理论在解释黑体辐射 (blackbody radiation) 和光电效应 (photoelectric effect) 等现象时遇到极大困难, 科学家们由此引入量子 (quantum) 理论来重新描述物理世界。1927 年, 英国物理学家狄拉克 (Paul Dirac) 对于电磁场量子化的工作成为了量子电动力学 (quantum electrodynamics) 的开端。

量子光学 (quantum optics) 的研究在近几十年来成为了物理学研究的一大热点, 尤其是激光技术的发展、半导体器件的研究以及其在量子通信、量子计算领域的前景使这一方向的科学家们更增热情。

2.2.1 量子力学基本概念

量子力学 (quantum mechanics) 的基本原理是量子光学理论的基础。在用量子理论研究光学问题时, 首先需要了解量子力学的基本描述方法。

2.2.1.1 波函数与量子态

在经典物理学中, 对一个物体的某个物理量 (quantity) 可以用一个实数描述, 对其测量永远只得到一个值。而在考虑量子的情况下, 例如描述某电子的位置, 由于电子没有确定的位置 (是随机变量), 对其位置的描述只能用一个概率分布 (概率密度函数 $f(x)$) 表示, 但真正测量此电子的位置时, 只会得到一个测量值 (是实数), 测量值服从上述概率分布。

又由于实际实验中发现, 描述量子物理量用概率分布并不够, 需要引入概率的相位信息才能解释很多实验现象^[7]。因此, 引入了概率振幅 $\psi(x)$ (probability amplitude) 的概念, 它是一个复数, 包含相位信息, 其模的平

方等于通常意义的概率密度 ($f(x) = |\psi(x)|^2$)。 $\psi(x)$ 类似于把概率密度看做是同时有相位和幅度信息的波，因此称之为波函数 (wavefunction)。

通常称一个物体“处于某个量子态”，写成 $|\psi\rangle$ 。量子态 (quantum state) 可以认为是一个总称，包含了对全部物理量的描述。当我们关心处于 $|\psi\rangle$ 的物体的位置时， $|\psi\rangle$ 可以具体化写成关于位置的波函数 $\psi_1(x)$ ；当关心其动量时，写成关于动量的波函数 $\psi_2(p)$ 。

2.2.1.2 本征态与叠加态

考虑一个量子态 $|\Phi\rangle$ 的某取离散值的物理量 Q ，有 P_i 的概率测量值为 i ($i = 1, 2, \dots, n$)，则可以写成：

$$|\Phi\rangle = a_1|1\rangle + a_2|2\rangle + \dots + a_n|n\rangle \quad (2-20)$$

$$\sum_{i=1}^n P_i = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 = 1 \quad (2-21)$$

称其中每一个 $|i\rangle$ 为一个物理量 Q 的本征态 (eigen state)，物理含义是：对 $|i\rangle$ 态测量物理量 Q ，一定会得到测量值 i ，即其波函数为离散冲击函数 $\delta(k-i)$ ，($k = 1, 2, \dots, n$)。这种表示和线性空间中的矢量定义类似， $|i\rangle$, ($i = 1, 2, \dots, n$) 是 n 个基矢 (basis vector)，相互间具有某种正交性 (不同基矢测量 Q 物理量不会得到相同值)。而 $|\Phi\rangle$ 则是张成的这 n 维空间中一个任意矢量，故又称为态矢 (state vector)，也是若干本征态线性叠加成的叠加态 (superposition state)。

对于连续取值的物理量，有：

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)|x\rangle dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1 \quad (2-22)$$

2.2.1.3 纯态与混合态

简单说来，能够用一个态矢量 $|\psi\rangle$ 表示出来的量子态称为纯态 (pure state)。对于纯态，每个物理量的波函数都是确定的。与之相对的是混态 (mixed state)，比如一个有 p_i 的概率处于 $|\psi_i\rangle$ 纯态上的量子态，它不能够用一个态矢表示出来。

描述混态需要用到密度矩阵 (density matrix):

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|, \quad \sum_i p_i = 1 \quad (2-23)$$

$$\hat{\rho} = \int p(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d\alpha, \quad \int p(\alpha) = 1 \quad (2-24)$$

分别对应于离散物理量和连续物理量的情况，其中的 p_i 和 $p(\alpha)$ 分别表示概率和概率密度。

在量子光学中，尤其是涉及到参量过程时，很多时候需要用密度矩阵进行描述。

2.2.1.4 算符及算符演化

我们用线性空间的一组矢量来描述物理量子态，对于量子态的运算统称为算符 (operator)，类似于线性空间中对矢量的操作用矩阵。由量子力学原理得知，对量子态某个物理量的一次观测，实际上已经改变了这个量子态。因此，对物理量进行观测也相当于是一个算符作用在量子态上。习惯性用对应物理量上方加箭头表示其算符。

算符的作用通常不满足交换律 (和矩阵类似): $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ 。并定义对易关系

(commutation relation):

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (2-25)$$

对一个量子态 $|\psi\rangle$ 的某个物理量 \hat{x} 的观测, 可以写为:

$$\langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \langle x|\psi^*(x)\mathrm{d}x \right] \hat{x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)|x\rangle\mathrm{d}x \right] \quad (2-26)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\psi^*(x)\psi(x)\langle x||x\rangle\mathrm{d}x \quad (2-27)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi(x)|^2\mathrm{d}x \quad (2-28)$$

其中, $\langle x|$ 定义为 $|x\rangle$ 的共轭转置 (从矩阵的观点来说)。上述公式用到了本征值方程: $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$, 即物理量作用在其本征态上, 得到本征值 (eigen value), 量子态不变。还用到了量子态的内积运算 (inner product): $\langle A|B\rangle \equiv \langle A||B\rangle$, 可以参考矢量的内积, 理解为投影, 并且有: $\langle A|A\rangle = 1$ 。此外, 不同的 \hat{x} 本征态是正交的, $\langle x_1|x_2\rangle = 0, (x_1 \neq x_2)$ 。

在一个系统中, 量子体系会随着时间发生演化 (evolution)。我们通过观测物理量来了解量子体系, 因此其对外表现出的观测值的改变才是科学家们直接得到的客观物理现象。而由上式可见, 观测值取决于算符和波矢量两者。于是对于这一现象的解释, 物理学家们描绘出了三种不同的图景, 称之为绘景 (picture): 薛定谔绘景 (Schrödinger picture), 态矢量随时间变化, 算符不随时间改变; 海森堡绘景 (Heisenberg picture), 算符随时间改变, 态矢量不改变; 相互作用绘景 (Interaction picture), 算符和态矢量同时随时间改变。由于不同绘景看待问题方法不同, 各自绘景中的演化方程形式也不相同, 但可以证明互等价。本文实际使用中, 会挑选合适的绘景, 以方便计算为目的。

2.2.1.5 量子纠缠极其判据

量子纠缠 (quantum entanglement), 是量子世界特有的现象, 它描述的是一个具有两个以上成员的复合系统中, 它的量子态不能够分解成各个成员量子态张量积 (tensor product) 的形式的情况。我们用一个两成员系统 $|ij\rangle, (i, j = 0, 1)$ 来说明, 每个成员可以处于 $|0\rangle$ 或者 $|1\rangle$ 两个离散的本征态上。考虑如下量子态 (实际上属于经典的 Bell 纠缠态):

$$|\Phi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2-29)$$

这个式子表明, 当测量第一个成员时, 如果测得 0, 那么第一个成员测量后塌缩 (quantum collapse) 到 $|0\rangle$ 本征态, 同时第二个成员也塌缩到 $|0\rangle$ 本征态上; 测得 1 亦然。这两个成员量子态之间并非独立, 存在很强的关联, 即量子纠缠。

在实际考察量子态纠缠特性时, 有一系列的纠缠判据 (entanglement criterion) 可以应用。在不同的物理领域和不同的前提条件下, 纠缠判据有不同的表述形式。本文中, 我们只关注光子对纠缠判据, 会在后文提到。

2.2.2 电磁场的量子化

经典电磁场理论中, 我们用振幅 (amplitude)、频率 (frequency)、相位 (phase)、波矢量 (wavevector) 来描述沿某方向振动的电磁场。振幅代表了能量 (energy), 相位则和时间有关, 在量子理论中, 由海森堡不确定性原理这两者不能够同时测准。因此, 只能分别用波函数来表示电磁场的振幅和相位, 观测对应的物理量的过程用算符表示。

完整的电磁场量子化过程比较复杂^[8]，在此仅做定性的描述：

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0[\hat{a}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \hat{a}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}] \quad (2-30)$$

$$= 2\mathbf{E}_0(\hat{X} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) + \hat{P} \sin(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})) \quad (2-31)$$

$$\hat{X} \equiv \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \hat{P} \equiv \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger) \quad (2-32)$$

其中， \hat{a} 称为湮灭算符 (annihilation operator)，相当于是将经典中的物理量复包络变成了算符表示。 \hat{a}^\dagger 称为产生算符 (creation operator)，在矩阵的观点下，是 \hat{a} 的共轭转置 (conjugate transpose)。 \hat{X} 和 \hat{P} 称为正则算符 (quadrature operator)，分别称为正则振幅 (quadrature amplitude) 和正则相位 (quadrature phase)，或者仿照描述粒子的方式唯象 (phenomenological) 地称为位置 (position) 和动量 (momentum)。

在量子力学中，只有本征值均为实数的算符才是可观测的 (observable)，能直接测量。故 \hat{a} 、 \hat{a}^\dagger 均不可观测， \hat{X} 、 \hat{P} 可观测。实际中，也都是靠测量 \hat{X} 、 \hat{P} 来考察一个光学量子态，常用零差检测 (homodyne detection) 和外差检测 (heterodyne detection)。并且它们满足对易关系：

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1 \quad (2-33)$$

$$[\hat{X}, \hat{P}] = \hat{X}\hat{P} - \hat{P}\hat{X} = \frac{i}{2} \quad (2-34)$$

量子光学中，一切物理量都可以用 \hat{a} 、 \hat{a}^\dagger 表示。光学过程中的能量包括电

场能和磁场能，不考虑非线性特性，用哈密顿算符 (Hamiltonian operator) 描述：

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{2} \int (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}) d\mathbf{r} \\ &= \sum_k \hbar\omega_k (\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2})\end{aligned}\quad (2-35)$$

即单个频率光的哈密顿算符为 $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2})$ 。定义光子数算符 (number operator)：

$$\hat{n} \equiv \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (2-36)$$

考虑到非线性效应时：

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{1}{2} \int (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{2} \int (\varepsilon_0 E^2 + \varepsilon_0 EP^L + \frac{B^2}{\mu_0} + \varepsilon_0 EP^{NL}) \\ &= \hat{H}_0 + \hat{H}_I\end{aligned}\quad (2-37)$$

其中 \hat{H}_0 为系统最初的哈密顿量， \hat{H}_I 为非线性作用下多束光的相互作用哈密顿量。在本文后续章节的计算中会用到。

2.2.3 常见单模光学量子态

经典的电磁波理论中，对于某种波导，电磁波可以存在于特定的模式 (mode) 下，如矩形波导的 TE_{10} 、 TM_{11} 模等。量子光学中，光子也认为处于特定的量子模式下。有如下常见的单模光学量子态：

2.2.3.1 福克态

福克态 (Fock state) 或称粒子数态 (number state) $|n\rangle$, 是粒子数算符的本征态:

$$\hat{n}|n\rangle = n|n\rangle, \langle m|n\rangle = \delta_{mn} \quad (2-38)$$

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (2-39)$$

粒子数态 $|n\rangle$ 可以理解为有 n 个粒子的量子态。湮灭算符 \hat{a} 和产生算符 \hat{a}^\dagger 作用后, 分别减少和增加了一个粒子, 这就是算符得名的原因。最后一个式子表明了粒子数本征态之间的正交性。

2.2.3.2 相干态

相干态 (coherent state) $|\alpha\rangle$ 是满足不确定性原理、最接近经典电磁场的量子态。它是湮灭算符的本征态:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (2-40)$$

此处本征值 α 是复数, 算符 \hat{a} 不可观测, 且本征态 $|\alpha\rangle$ 之间不正交^[8]。真空所处的真空态 $|0\rangle$, 以及激光器产生的高稳定单模激光, 都可以认为处于相干态。

2.2.3.3 压缩态

海森堡不确定性原理决定了: 光场的振幅和相位不能同时确定, 即其方差的乘积有最小值限制。在相干态中, 两者方差乘积恰好取最小值, 即最小不确定态。压缩态 (squeezed state) 是正则振幅和正则相位中的某一个分量方差被压缩, 另一个分量方差被增大的量子态。压缩态的某个分量可以认为几乎确定 (方差很小)。

压缩态可以由压缩算符作用在相干态上获得，实验中可以由非线性光学过程制备。

2.2.4 光学量子态的演化

光在介质中传播，各种物理量会随时间发生演化 (evolution)。量子力学中认为，能量即哈密顿量 (Hamiltonian) 是系统时间演化的原因。量子系统的演化遵循演化方程，由于绘景的不同，演化方程有不同的形式：

2.2.4.1 薛定谔方程

在薛定谔绘景下，可以用薛定谔方程 (Schrödinger equation) 描述量子态的演化：

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = \hat{H} \psi(t) \quad (2-41)$$

薛定谔方程描述了量子态演化的动力学规律，其正确性由实验检验。

2.2.4.2 海森堡方程

海森堡方程 (Heisenberg equation) 是海森堡绘景下的演化方程，量子态不发生改变，算符演化：

$$\frac{d}{dt} \hat{A}(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}(t)] + \left(\frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t} \right)_{\text{classical}} \quad (2-42)$$

2.2.4.3 主方程

主方程 (master equation) 方法是计算量子光学时的常用方法。它是海森堡绘景和相互作用绘景下的算符演化的方程。作用在海森堡绘景下时，总哈密顿量写成系统本身的哈密顿量 \hat{H}_S 、环境热池 (reservoir) 哈密顿量 \hat{H}_R 和相互作用

哈密顿量 \hat{H}_I 之和的形式^[9]。而作用在相互作用绘景下时，只需要取相互作用哈密顿量一项。某系统的全密度矩阵的演化方程为：

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}_S + \hat{H}_R + \hat{H}_I, \hat{\rho}], \quad \text{in Heisenberg picture} \quad (2-43)$$

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}_I, \hat{\rho}], \quad \text{in interaction picture} \quad (2-44)$$

这里没有考虑衰减项。

2.2.4.4 福克 - 普朗克方程

实际求解主方程的时候可以等价转换成福克 - 普朗克方程 (Fokker-Planck equation)。这种随机微分方程 (stochastic differential equation) 具有很好的性质，能利用矩阵谱理论的一些结论进行简化。一个典型的福克 - 普朗克方程形如：

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} A_i P + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij} P \quad (2-45)$$

它可以转化成随机微分方程组：

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} \quad (2-46)$$

这是一种紧凑的表示方程组的方式。其中 \mathbf{x} 、 \mathbf{A} 、 $\boldsymbol{\eta}$ 均为列向量，其元素分别为 x_i 、 A_i 、 η_i 。 η_i 是方差为 1 均值为 0 的实数高斯噪声项。 \mathbf{B} 是方阵，满足 $\mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T$ ，其中 \mathbf{D} 是元素为 D_{ij} 的方阵。

福克 - 普朗克方程可以由主方程转化而来。把密度矩阵按相干态展开：

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha \quad (2-47)$$

由于相干态本征态 $|\alpha\rangle$ 并不是正交基，定义一种新的态巴格曼态 (Bargmann state) $||\alpha\rangle$ ：

$$||\alpha\rangle \equiv e^{1/2|\alpha|^2} |\alpha\rangle \quad (2-48)$$

$$\hat{a}^\dagger ||\alpha\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \sqrt{n+1} |n+1\rangle = \frac{\partial}{\partial \alpha} ||\alpha\rangle \quad (2-49)$$

$$\langle \alpha || \hat{a} = \sum_n \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} \sqrt{n+1} \langle n+1| = \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \langle \alpha || \quad (2-50)$$

于是得到：

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha) e^{-|\alpha|^2} ||\alpha\rangle \langle \alpha || d^2\alpha \quad (2-51)$$

$$\hat{a}^\dagger \hat{\rho} = \int P(\alpha) e^{-\alpha\alpha^*} \frac{\partial}{\partial \alpha} (||\alpha\rangle \langle \alpha ||) d^2\alpha \quad (2-52)$$

$$= \int P(\alpha) e^{-|\alpha|^2} (\alpha^* - \frac{\partial}{\partial \alpha}) ||\alpha\rangle \langle \alpha || d^2\alpha \quad (2-53)$$

类似地推导过程可以得到：

$$\begin{cases} \hat{a}\hat{\rho} & \leftrightarrow \alpha P(\alpha) \\ \hat{a}^\dagger\hat{\rho} & \leftrightarrow (\alpha^* - \frac{\partial}{\partial \alpha})P(\alpha) \\ \hat{\rho}\hat{a} & \leftrightarrow (\alpha - \frac{\partial}{\partial \alpha^*})P(\alpha) \\ \hat{\rho}\hat{a}^\dagger & \leftrightarrow \alpha^* P(\alpha) \end{cases} \quad (2-54)$$

主方程中的项都形如湮灭算符、产生算符、密度算符乘积的形式，可以将它们全部等效替换成关于 α 、 α^* 、 $P(\alpha)$ 的形式。即实现主方程向福克 - 普朗克方程的转化。实际计算的例子，会在本文后续章节给出。

2.2.5 光学量子纠缠

光子也具有纠缠性质，实际上光子纠缠对是研究纠缠态的常用纠缠源。光子对的纠缠是指多个光子的某个物理性质互相之间不独立。通常用到的纠缠物理量有：极化纠缠 (polarization entanglement)、正则量纠缠 (quadrature entanglement)、频率纠缠、时间纠缠等。本文着重关注的是正则量纠缠。

这里到底怎么写!!

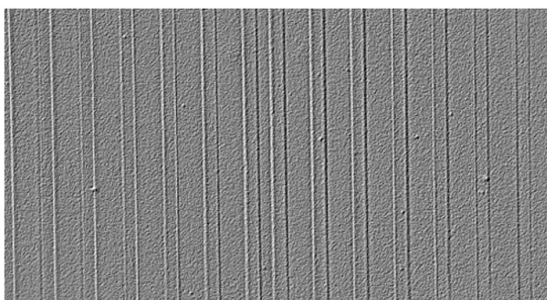
2.3 本章小结

本章分别先是从经典的波动方程角度介绍了非线性光学的背景知识，着重介绍了非线性效应的引入、准相位匹配的概念和一些常见的应用。接着从量子理论的基础知识入手，介绍了量子理论描述物理世界的方法、电磁场的量子化等，着重讲解了量子光学中相关方程、公式的运用。

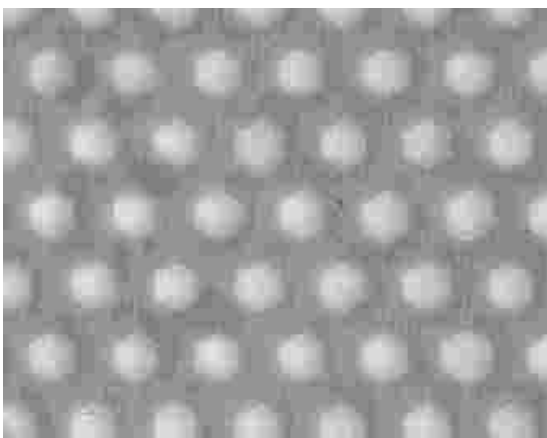
文中的叙述都是作者根据几年实验室经历的理解，重新组织、安排顺序后呈现的，力图做到简明扼要，以能让具有高中物理背景的读者入门为目的。

第三章 非线性光子晶体设计方法的程序化实现及 与 Comsol 联合仿真

光子晶体 (photonic crystal) 是指由不同光学性质的介质有规律性排列而成的人工微结构。这里我们光学性质指的显然是非线性极化率。图中即为一个典型的一维非线性光子晶体，能看到明显的分界线分开了具有不同极化率的介质。



(a) 一维光子晶体^[10]



(b) 二维光子晶体^[11]

图 3-1 光子晶体微观图像^[10]

所谓光子晶体的设计，指的就是对非线性极化率的调制，使其变成关于空间位置的函数 $g(\mathbf{r})$ 。由上一章准相位匹配技术 (QPM) 知识可知，要使晶体能够实现某个光学参量过程，只需要使其非线性极化率的空间频谱上有对应于光学过程失配量 Δk 的分量即可。且需要的频率分量强度越高、无关频率分量成分越低，转化效率就越好。

受限于实际加工工艺，我们不能在同一块介质上产生任意多种不同的极化率。事实上，通常极化率只能取 2 种离散的值。也就是说， $g(\mathbf{r})$ 是取离散值的函数，提取出归一化系数之后，不妨可以认为 $g(\mathbf{r})$ 取值 $\{-1, 1\}$ 。其次，实际加工时，是对一块均匀介质进行局部处理，使局部极化率转变，精度不可能无限小，一般仅能达到微米 (μm) 级别。

设计晶体时，被局部加工的区域往往有特定的形状，如上图一维情况下的一段区域，二维情况下的一个圆形。它们称为基本图案 (motif)，一般为：圆形、矩形、六边形等。对晶体的设计简化为：设计每个基本图案的位置 (中心点的分布)；设计不同的基本图案函数；两者卷积即获得晶体的 $g(\mathbf{r})$ 。

3.1 非线性光子晶体设计方法

通常使用周期性极化 (periodically poled) 的非线性光子晶体，即 $g(\mathbf{r})$ 为周期函数。使用这种晶体有如下弊端：一块加工好的晶体只能匹配单一的光学参量过程，因为其频谱成分少 (倍频分量强度小，忽略不计)；同时按照多个周期加工同一块晶体以获得多频谱分量也不现实，因为加工精度所限，多周期时必定出现分界密集的区域，难以加工。

A. Arie, A. Bahabad, and N. Habshoosh 提出了一种改进的设计方法^[13]。这种设计方法从固态物理学中获得灵感，使用准晶体 (quasi-crystal) 的设计思路来设计光子晶体的准周期结构 (quasi-periodic structure)。由图中银铝准晶体的例子可见，准周期结构具有长程有序 (long-range order) 的特性，不同于非晶体结

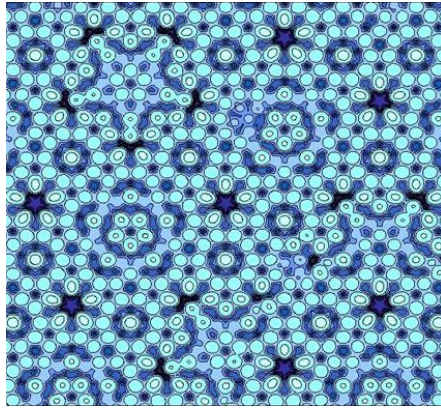


图 3-2 准晶体结构示意图^[12](银铝准晶体的原子模型)

构，但是却又不具备晶体结构的平移对称性 (translation symmetry)。这种结构在设计中有众多优点，

本文作者在 A. Arie 等人的论文^[13] 及实验室学长工作的基础上加以改进，使其更适合于程序化实现。方法基于准周期结构设计。

3.1.1 设计目标概述

这种设计方法及程序化实现过程需要达成如下目标：

- 能够针对任意失配量的通用设计方法。
- 能够适用于一维和二维准晶体的设计。
- 能够适用于同时匹配多个失配量的要求。
- 程序化实现能自动完成设计过程，并能进行频谱分析，评判优劣。

3.1.2 设计方法原理简述

一维的周期性结构可以用一个基矢表示它的周期，通常基矢平行于光学介质的主轴： $\mathbf{a} = \Lambda \mathbf{a}_z$ ，其中 Λ 为一维周期， \mathbf{a}_z 为主轴方向。二维的周期结构由

两个基矢确定，设为 \mathbf{a}_1 、 \mathbf{a}_2 。晶体中每个晶格 (lattice) 点位置为 (即基本图案摆放的中心点):

$$1\text{D}: z_m = m\mathbf{a}, \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad (3-1)$$

$$2\text{D}: \mathbf{r}_{mn} = m\mathbf{a}_1 + n\mathbf{a}_2, \quad (m, n \in \mathbb{Z}) \quad (3-2)$$

则整个晶体的晶格 (lattice) 对应于函数:

$$1\text{D}: u(\mathbf{r}) = u(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(z - z_m) = \sum_m \delta(z - m\Lambda\mathbf{a}_z) \quad (3-3)$$

$$2\text{D}: u(\mathbf{r}) = \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{mn}) = \sum_{m,n} \delta(\mathbf{r} - m\mathbf{a}_1 - n\mathbf{a}_2) \quad (3-4)$$

令每个晶格格点处加工出的基本图案为函数 $s(\mathbf{r})$ ，函数值 $\{0, 1\}$ 取值。则实际晶体归一化极化率函数为晶格函数与基本图案函数卷积 (convolution) 而成:

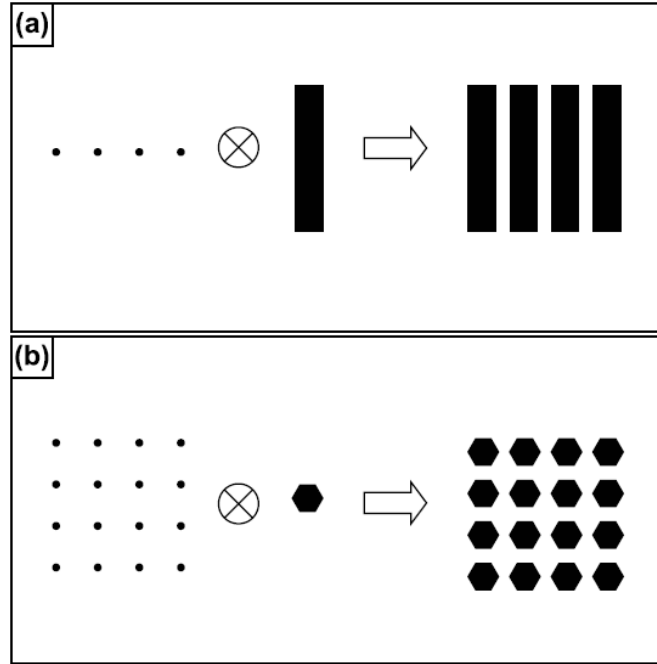
$$g(\mathbf{r}) = [a(\mathbf{r}) \times u(\mathbf{r})] * s(\mathbf{r}) \quad (3-5)$$

$$G(\mathbf{f}) = A(\mathbf{f}) * U(\mathbf{f}) \times S(\mathbf{f}) \quad (3-6)$$

实际的晶体都是有限大的，上式中的 $a(\mathbf{r})$ 描述晶体的实际所占区域，区域内取值 1，区域外取值 0。公式3-6为公式3-5的傅里叶变换形式。

3.1.3 设计方法流程

主要设计思路是：设计一个高维空间中的周期性晶体，而实际制备出的晶体是这个高维晶体在低维的投影。具体原理解释，需要参看固体物理中关于准晶体的论述，不是本文重点。


 图 3-3 一维、二维晶格和基本图案卷积示意图^[13]
Step 1:

设需要设计的晶体是 n 维准周期结构 ($n = 1, 2$)。需要同时匹配 D 个非线性过程的失配量, 分别记为: $\Delta \mathbf{k}^{(j)} = (\Delta k_1^{(j)}, \dots, \Delta k_n^{(j)})$, ($j = 1, 2, \dots, D$), 即 D 个 n 维向量。

这 D 个失配量可以换一个角度, 看成是 n 个 D 维向量: $(\Delta k_\mu^{(1)}, \Delta k_\mu^{(2)}, \dots, \Delta k_\mu^{(D)})$, ($\mu = 1, \dots, n$)。这些矢量张成了一个 D 维空间的 n 维子空间。

我们在此基础上继续选取 $(D - n)$ 个 D 维单位矢量, 这些单位矢量的选取是任意的, 唯一的要求是它们要同时正交于上述 n 个 D 维矢量。选取正交矢量的目的是希望高维空间的周期晶体向低维投影时能忽略掉引入的基矢的影响。设新选取的 $(D - n)$ 个矢量为: $(q_\mu^{(1)}, q_\mu^{(2)}, \dots, q_\mu^{(D)})$, ($\mu = n + 1, \dots, D$)。

现在我们有 D 个 D 维矢量, 足够作为高维空间的基矢来构造晶体。构造

矩阵:

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \Delta k_1^{(1)} & \dots & \Delta k_n^{(1)} & q_{n+1}^{(1)} & \dots & q_D^{(1)} \\ \Delta k_1^{(2)} & \dots & \Delta k_n^{(2)} & q_{n+1}^{(2)} & \dots & q_D^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Delta k_1^{(D)} & \dots & \Delta k_n^{(D)} & q_{n+1}^{(D)} & \dots & q_D^{(D)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{(1)} \\ \mathbf{K}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{K}^{(D)} \end{pmatrix} \quad (3-7)$$

Step 2:

物理学中, 晶体晶格点阵 (lattice) 所在的空间成为正空间, 而傅里叶变换得到的空间频率空间称为倒易空间 (reciprocal space), 倒易空间中的点阵称为倒易点阵 (reciprocal lattice)。用于描述倒易点阵中格点位置的参量称为倒格矢 (reciprocal lattice vector)。在我们的计算中, D 维空间的基矢 \mathbf{K}^j 即为所设计的晶体的倒格矢。倒格矢组成的矩阵 \mathbf{K} 和正空间的基矢组成的矩阵 \mathbf{A} 之间存在如下关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{K}^T &= 2\pi\mathbf{I} = \mathbf{K}^T\mathbf{A} \\ \Rightarrow \mathbf{A} &= 2\pi\mathbf{I}(\mathbf{K}^T)^{-1} \end{aligned} \quad (3-8)$$

其中 \mathbf{I} 为 D 阶单位矩阵。得到的正空间基矢矩阵的元素表示为:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(1)} \\ \mathbf{A}^{(2)} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{(D)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a_n^{(1)} & b_{n+1}^{(1)} & \dots & b_D^{(1)} \\ a_1^{(2)} & \dots & a_n^{(2)} & b_{n+1}^{(2)} & \dots & b_D^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1^{(D)} & \dots & a_n^{(D)} & b_{n+1}^{(D)} & \dots & b_D^{(D)} \end{pmatrix} \quad (3-9)$$

其中我们的主要目的是获得了 D 个 n 维向量: $\mathbf{a}^{(j)} = (a_1^{(j)}, \dots, a_n^{(j)})$, ($j = 1, 2, \dots, D$)。相当于获得了可以用于构造准晶体的正空间的一组基矢, 称为拼

接向量 (tiling vector)。

Step 3: 下一步, 我们要根据正空间的基矢 $\mathbf{a}^{(j)}$ 构造出准晶体结构。构造准晶体的方法称为双格构造法 (dual grid construction)^[13]。这种构造过程的步骤如下:

1. 每个相位失配量 $\Delta\mathbf{k}^{(j)}$ 对应于双格空间中的一组等间距平行直线族, 这些直线与 $\Delta\mathbf{k}^{(j)}$ 方向垂直, 直线间间距为 $L_j = 2\pi/|\Delta\mathbf{k}^{(j)}|$ 。实际作图时, 给每一个直线族一个可调节的初始偏移量 $f_j L_j$, ($0 \leq f_j \leq 1$)。这里初始偏移量的调节是希望尽可能避免不同直线族间发生三线共点的情况。根据后文公式可以发现, 初始偏移量的选取并不会影响设计好的准晶结构的频谱振幅, 仅仅影响相位信息。
2. 为每一个平行线族的直线编号。假定第 j 族直线沿 $\Delta\mathbf{k}^{(j)}$ 方向, 编号递增。
3. 若干族的直线把整个平面分割成了无数小区域, 形象的称它们为瓦片区 (tile)。我们为每一个瓦片区赋予一个标号, 这个标号是一个 D 维向量: (n_1, n_2, \dots, n_D) , 其中 n_j 表示第 j 个平行线族中从 $-\Delta\mathbf{k}^{(j)}$ 方向上来看, 距离这个瓦片区最近的直线的编号。
4. 每一个双格空间中的瓦片区可以对应一个晶体正空间中的格点, 格点的位置由瓦片区的标号确定: $\sum_{j=1}^D n_j \mathbf{a}^{(j)}$ 。

到这里为止, 准晶体的晶格 (lattice) 的准周期结构已经设计完成, 即公式3-5中的 $u(\mathbf{r})$ 已经确定。接下来只需要选取合适的形状 $s(\mathbf{r})$ 作为基本图案, 放置在格点的位置即可。为了演示起见, 我们只计算圆形基本图案的情况。半

径为 R 的圆形基本图案的函数及其傅里叶变换为：

$$s_{circle}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & |\mathbf{r}| \leq R \\ 0, & elsewhere \end{cases} \quad (3-10)$$

$$S_{circle}(\mathbf{f}) = \frac{R}{|\mathbf{f}|} J_1(2\pi R|\mathbf{f}|) \quad (3-11)$$

其中 $J_1(x)$ 是第一类 1 阶贝塞尔函数 (Bessel function of first kind)。

3.1.4 程序化实现

3.1.4.1 程序主体流程图

这里缺一个流程图!!!

程序的设计思路是这样的：首先，用户需要输入一些参数，主要包括：问题的维度，需要匹配的失配量的个数，失配量大小和方向，建立双格的每个平行线族线条数量，所选用的基本图案函数。

接着，程序利用解线性方程组的方法，构造出 $(D - n)$ 个 D 维向量，补全 \mathbf{K} 矩阵，再由倒格矢和正空间基矢的正交关系，计算出正空间矩阵 \mathbf{A} ，并得到了用于构造正空间晶格的一组基矢 $\mathbf{a}^{(j)}$ 。

接着建立双格空间 (dual grid)。在一维情况下，只需要用一个数组记录每条平行线位置。二维的情况下，每条平行线在计算机中用 3 个数描述，利用了平面解析几何中直线的一般式方程：

$$A \cdot x + B \cdot y + C = 0 \quad (3-12)$$

每一个平行线族都用 A, B, C 三个数组表示。

我们根据不同族的 A, B, C 数组可以求出所有的直线交点。计算出每个平

行线族关于每个点最近的直线序号值，这一系列的序号值就构成了一个相对坐标。

使用 $\sum_{j=1}^D n_j \mathbf{a}^{(j)}$ 公式确定晶体正空间中的一个坐标，由这一点出发
这里没有写完!!

下面从实例出发来验证程序化设计方法，为了达到验证正确性的目的，设计指标都按照相关参考文献中的数据，以作对比。

3.1.4.2 一维晶体设计实例

设计要求^[10]：设计一个一维的非线性晶体结构，使它能同时匹配 3 个不同波长的二次谐波产生 (SHG) 过程，入射波波长为：1530nm、1550nm、1570nm。使用的介质材料为 KTiOPO_4 (KTP)，在 100°C 条件下，计算得到失配量为：

$$\Delta k^{(1)} = 0.263 \mu\text{m}^{-1} \quad (3-13)$$

$$\Delta k^{(2)} = 0.256 \mu\text{m}^{-1} \quad (3-14)$$

$$\Delta k^{(3)} = 0.249 \mu\text{m}^{-1} \quad (3-15)$$

代码 3.1 一维设计程序初始化

```

1  % M - Number of Mismatches
2  M = 3;
3  % k_mag - Mismatches in um^-1
4  k_mag = [0.263, 0.256, 0.249]*1e6;
5  % N - Number of Lines in Each Dual-Grid Line Family
6  N = 2000;
7  % L_x - Length of the Crystal in um^-1
8  L_x = 4e4 * 1e-6;
9  % dc : Duty Cycle for Each Motif
10 dc = [1.000, 0.000, 0.000];

```

```

11 % MINK, MAXK, KPNT - Scope and Precision of the View in reciprocal space
12 MINK = 0.245 * 1e6;
13 MAXK = 0.270 * 1e6;
14 KPNT = 10000;
    
```

其中， M 为需要匹配的失配量总数目， k_mag 为各失配量的幅值（一维情况失配量无相位）， N 为计算时双格空间中每个平行线族的直线数目， L_x 为设计的晶体的长度， dc 为每种基本图案的占空比（一维情况下，基本图案表现为数轴上的一段，能设计的是其占空比）， $MINK$ 、 $MAXK$ 、 $KPNT$ 用于分析频谱时确定观察范围和精度。

接下来，建立 K 矩阵：

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \Delta k^{(1)} & q_2^{(1)} & q_3^{(1)} \\ \Delta k^{(2)} & q_2^{(2)} & q_3^{(2)} \\ \Delta k^{(3)} & q_2^{(3)} & q_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.263 & -0.256 & -0.249 \\ 0.256 & 0.263 & 0 \\ 0.249 & 0 & 0.263 \end{pmatrix} \quad (3-16)$$

符合正交性关系的要求，即： $q_i \cdot k_1 = 0, (i = 2, 3)$ 。进而计算得到 A 矩阵：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a^{(1)} & b_2^{(1)} & b_3^{(1)} \\ a^{(2)} & b_2^{(2)} & b_3^{(2)} \\ a^{(3)} & b_2^{(3)} & b_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.401 & -8.177 & -7.954 \\ 8.177 & 1.593 & -7.742 \\ 7.954 & -7.742 & 1.636 \end{pmatrix} \quad (3-17)$$

代码 3.2 一维设计程序建立 K 矩阵和 A 矩阵

```

1 K = zeros(M);
2 K(:, 1) = k_mag';
3 for ii = 2 : M
4     K(1, ii) = -K(ii,1);
5     K(ii, ii) = K(1,1);
    
```

```
6 end  
7 A = 2 * pi * (K')^-1;
```

用 $\Delta k^{(j)}$ 建立双格空间的图像:

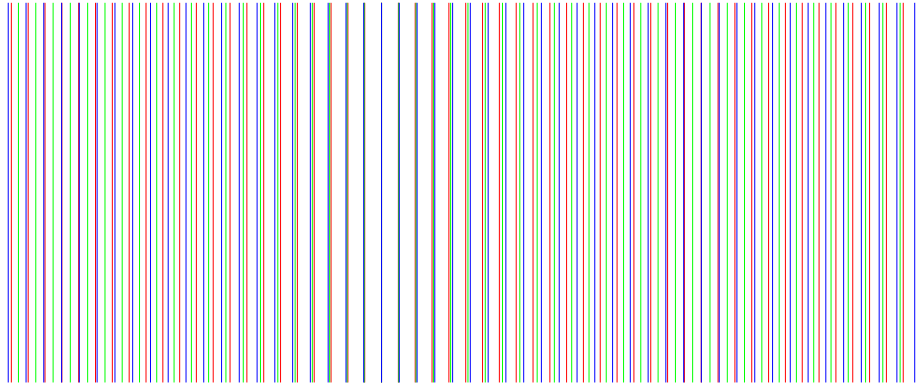


图 3-4 一维设计实例双格图

图中一共三种不同颜色的平行线，同一种颜色表示属于同一个平行线族，间距为 L_j 。根据双格空间直线的位置分布，可以确定出晶体正空间格点分布。由于在一维的情况下，正空间的格点观察不明显，我们把格点用不同颜色的基本图案填充好后呈现:

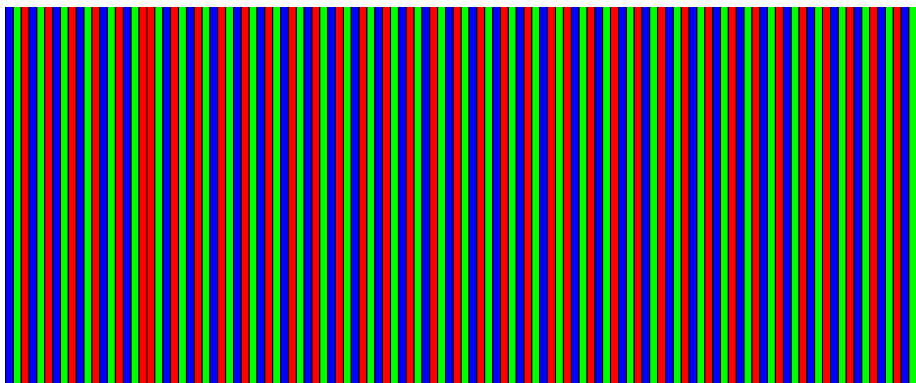


图 3-5 一维设计实例晶体示意图

图中每一中颜色的色块，是由双格空间中对应颜色的直线转换过去，共三种颜色。此处，使用不同颜色的色块来区分不同的基本图案。实际晶体中，

只有两种不同的极化率，即图中色块处只能取两种值之一。因此，我们用占空比 (duty cycle) 来描述基本图案：每种色块按照各自的占空比转换成两种值 $\{-1, 1\}$ 。下图即为选取红色色块占空比为 100%，其余 0% 的情况 (图中黑色白色的区域分别代表不同极化率)：

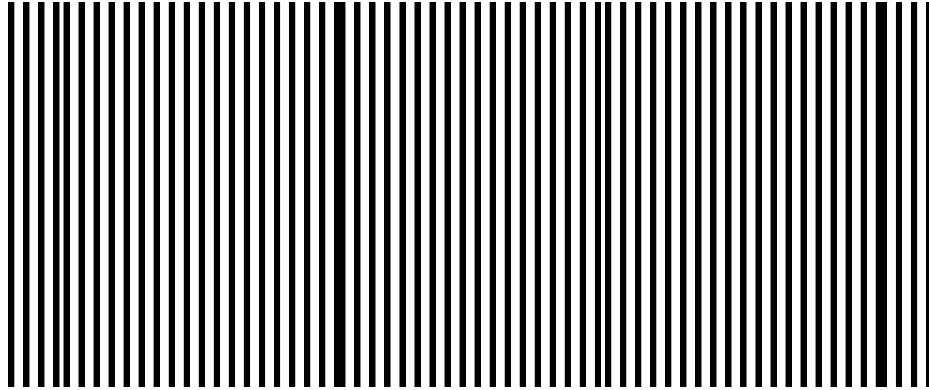


图 3-6 一维设计实例晶体图

接下来，我们需要分析这种设计是否符合要求，对其进行频谱分析得到下图 (横坐标单位 m^{-1}):

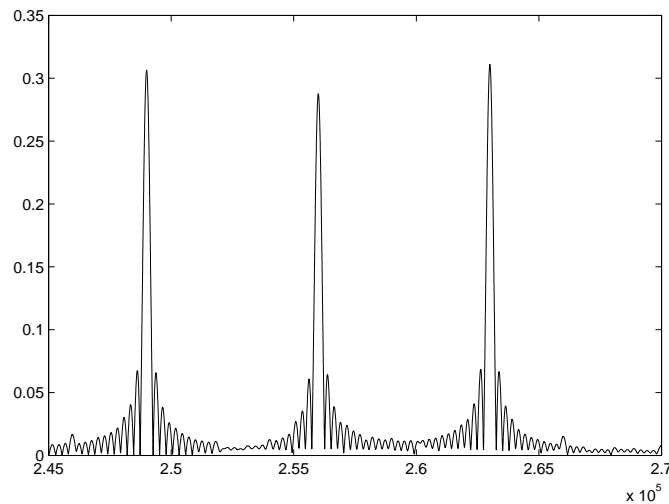


图 3-7 一维设计实例频谱图 - 占空比 (100%,0%,0%)

图中能够清楚地看到，在我们需要的 3 个位置处 ($0.249\mu\text{m}^{-1}$ 、 $0.256\mu\text{m}^{-1}$ 、 $0.263\mu\text{m}^{-1}$) 都出现了极大值，而且其余频率成分被很好的抑制。我们考察其他占空比设置情况下的频谱：

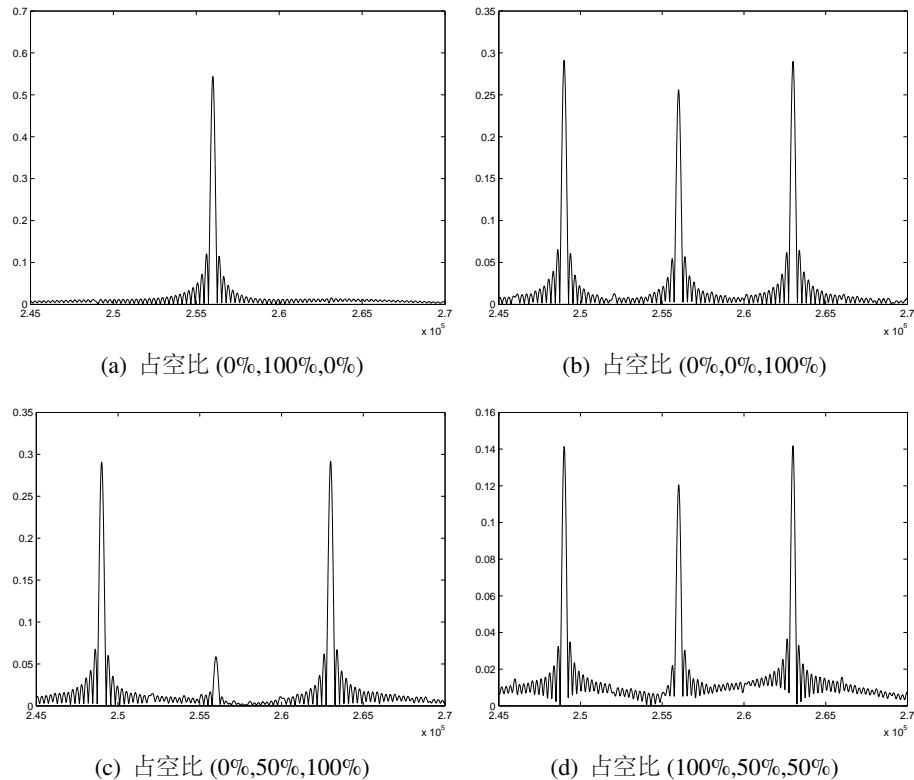


图 3-8 一维设计实例频谱图 -不同占空比对比

这些图形中可以发现，占空比的选取对于频谱的效果有很大的影响。频谱既需要在特定频点有较强的幅度，又需要各个频点位置处强度基本相当，这样才能对设计要求的三个过程有近似相等的转化效率。经过多次试验，我们挑选了占空比 (100%,0%,0%) 为最佳组合。

3.1.4.3 二维晶体设计实例

设计要求^[14]：设计一个二维的非线性晶体结构，使它能同时匹配 3 个不同的和频产生 (SFG) 过程。整个过程的示意框图为：

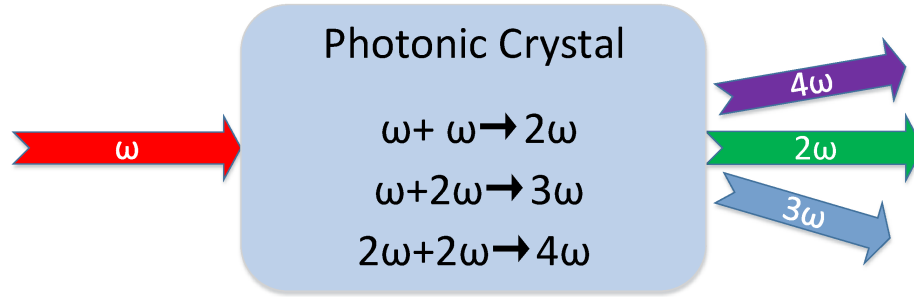


图 3-9 二维设计实例 - 光学过程

输入一束单频 ω 的光，首先倍频为 2ω ，接着再次倍频为 4ω ，还有还有一个和频过程生成 3ω 的光。为了能够对比仿真效果，数据均与参考文献相同^[14]。假设采用 150°C 的铌酸锂 (LiNbO_3) 材料，入射光波长为 $\lambda = 1550\text{nm}$ ，可以计算出三个过程的失配量，用幅度和相位表示为：

$$\Delta \mathbf{k}^{(1)} = 0.33942 \mu\text{m}^{-1} \angle + 0.0000 \quad (3-18)$$

$$\Delta \mathbf{k}^{(2)} = 0.93931 \mu\text{m}^{-1} \angle + 0.0456 \quad (3-19)$$

$$\Delta \mathbf{k}^{(3)} = 0.31768 \mu\text{m}^{-1} \angle - 0.0966 \quad (3-20)$$

建立对应的 \mathbf{K} 矩阵为：

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \Delta k_1^{(1)} & \Delta k_2^{(1)} & q_3^{(1)} \\ \Delta k_1^{(2)} & \Delta k_2^{(2)} & q_3^{(2)} \\ \Delta k_1^{(3)} & \Delta k_2^{(3)} & q_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.33942 & 0 & -0.04228 \\ 0.93833 & 0.04281 & 0.01039 \\ 0.31619 & -0.03064 & 0.01453 \end{pmatrix} \quad (3-21)$$

符合正交性关系的要求，即： $\mathbf{q}_3 \cdot \mathbf{k}_i = 0, (i = 1, 2)$ 。进而计算得到 \mathbf{A} 矩阵：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & b_3^{(1)} \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & b_3^{(2)} \\ a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & b_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.80486 & -30.84842 & -126.06302 \\ 3.86259 & 54.56555 & 31.00150 \\ 5.39772 & -128.81170 & 43.32261 \end{pmatrix} \quad (3-22)$$

代码 3.3 二维设计程序建立 \mathbf{K} 矩阵和 \mathbf{A} 矩阵

```

1 k_mag = [0.33942, 0.93931 , 0.31768];
2 k_ang = [0 , 0.0456 , -0.0966];
3 matrixK = zeros(M);
4 matrixK(:, 1) = k_mag' .* cos(k_ang');
5 matrixK(:, 2) = k_mag' .* sin(k_ang');
6 for ii = 3 : M
7     tempmatrix = matrixK([1 2 ii ],[1 2 ii ]);
8     tempcolumn = zeros(1,3);
9     for jj = 1 : 3
10        tempmatrix(jj ,3) = 1;
11        tempcolumn(jj) = det(tempmatrix);
12        tempmatrix(jj ,3) = 0;
13    end
14    matrixK([1 2 ii ], ii) = tempcolumn';
15 end
16 matrixA = 2 * pi * (matrixK')^-1;
17 a_x = matrixA(:,1)';
18 a_y = matrixA(:,2)';
19 a_mag = sqrt(a_x.^2 + a_y.^2);
20 a_arg = atan(a_y./a_x);
    
```

其中 matrixK 为 \mathbf{K} 矩阵， matrixA 为 \mathbf{A} 矩阵， k_mag 、 k_ang 、 a_mag 、 a_ang 分别是 $\Delta \mathbf{k}^{(j)}$ 、 $\mathbf{a}^{(j)}$ 矢量的幅度和相位。构造 \mathbf{K} 矩阵的时候使用一个数学技巧来获得正交向量。

建立其相应的二维双格：图中能够清楚地看到三个平行线族，平行间的间

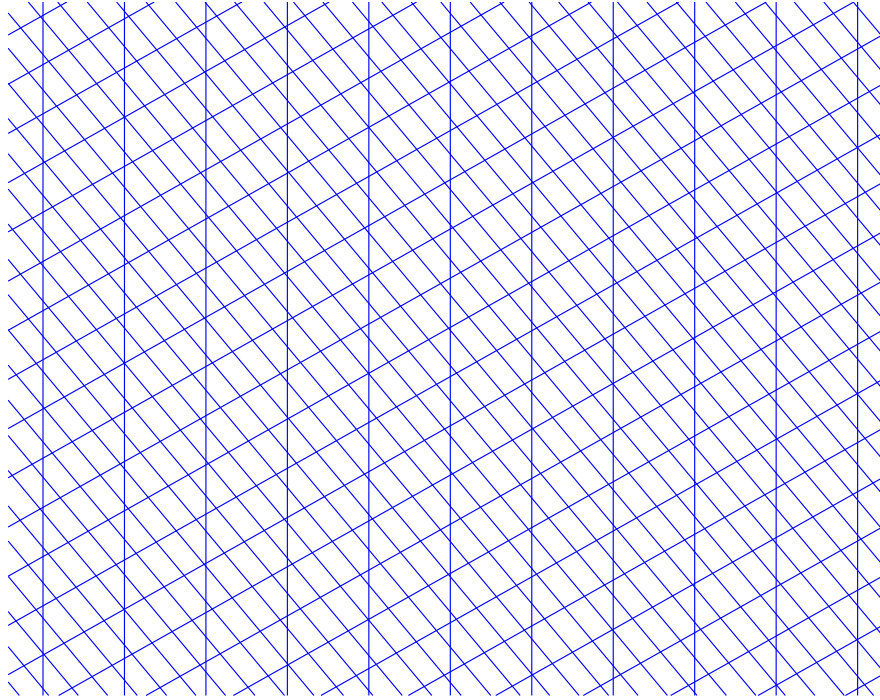


图 3-10 二维设计实例双格图

距分别为 L_j , ($j = 1, 2, 3$)。为了显示清楚的目的，上图的横坐标和纵坐标单位不相同。

双格空间中的每一个瓦片区，对应于晶体正空间中的一个晶格点，因此，作出晶体正空间的结构为：图中可以明显的看出本程序所设计的准周期结构特性：长程有序且不具有平移对称性。构成上图的基本矢量即为 $\mathbf{a}^{(j)}$, ($j = 1, 2, 3$)。实际的晶体大小是有限的，图中用红色标注出的点即为实际晶体中取的矩形区域的点。

对准晶体结构进行二维傅里叶变换可以得到其频谱图为，图3-12：

从图中可以看出，设计要求中所需要匹配的三个失配量对应的位置处，均有比较强的频谱分量，它们分别为： $\mathbf{k}^{(1)} = (0.33942, 0)$, $\mathbf{k}^{(2)} = (0.93833, 0.04281)$, $\mathbf{k}^{(3)} = (0.31619, -0.03064)$ 。

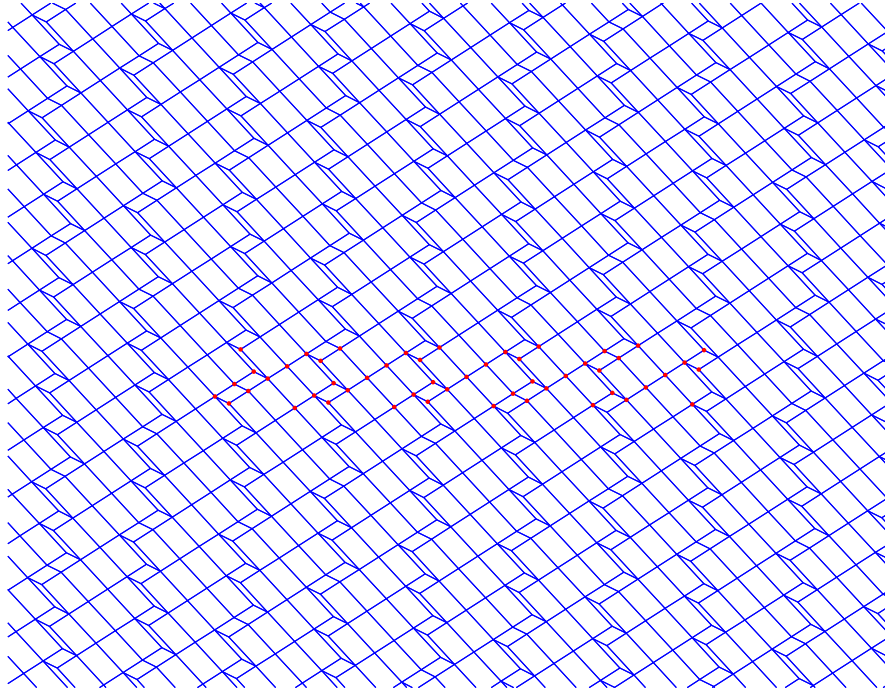


图 3-11 二维设计实例晶体图

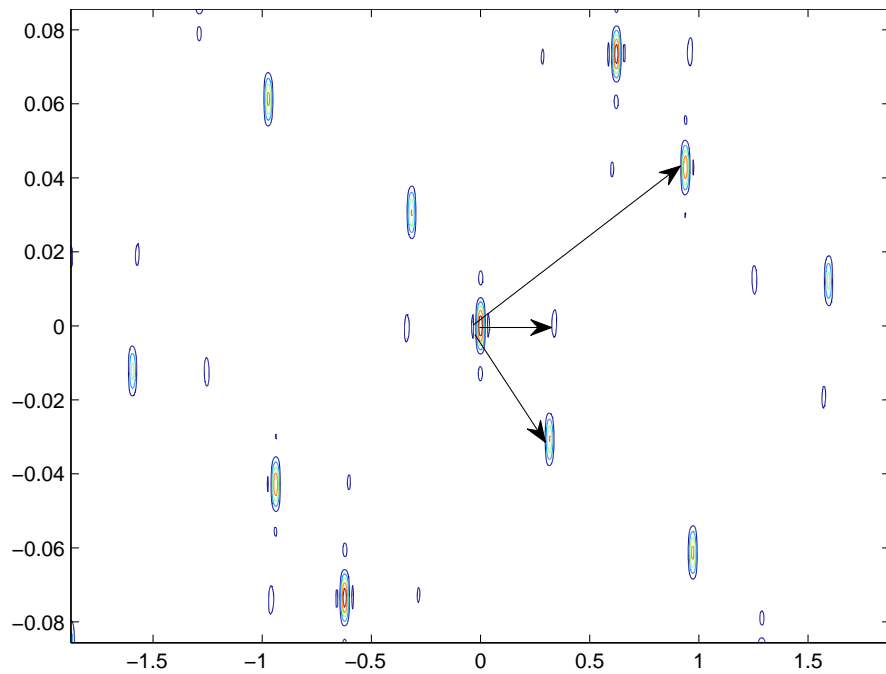


图 3-12 二维设计实例频谱

因此可以认为二维仿真程序的结果是成功的。

3.2 应用前景

基于准周期结构的非线性光子晶体设计方法不论是在理论研究中还是工业实践中，都有重要的价值。在研究中，此方法可以用来同时匹配多个参量过程，以使同一块晶体能工作于多波长条件下，或者可以用来制备多方纠缠源。在工业实践中，尤其是通信行业中，光通信技术正逐步取代传统的电信号通信技术，这势必对光信号的波长转换等提出更高的要求。

下面简要介绍两个典型的应用。

3.2.1 多参量过程提高频率转换效率

这个方法由 Gil Porat 等人于 2010 年在其论文^[5]中提出。通常的光学参量振荡器 (OPO) 中，只发生一个过程，如入射一束泵浦光 ω_p ，输出信号光 ω_s 和闲置光 ω_i ，满足 $\omega_p = \omega_s + \omega_i$ 。由于非线性系数通常比较小，又只有一束泵浦光很强，因此上述过程通常转化效率比较低。

改进方法的思路是，利用多个参量过程，每一个过程都产生需要的目标光 ω_i ，框图如下：首先发生第一个光学参量振荡过程，产生 i, s 光。其后， s 光通

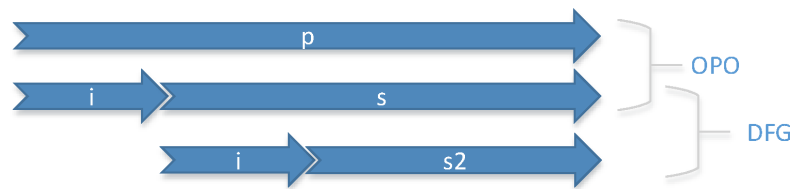


图 3-13 多参量过程提高频率转换效率

过一个差频过程继续产生 i, s_2 光。两个过程中均产生了 i 光，提高了效率。

3.2.2 多方纠缠源制备

第二个应用是可以用此方法设计晶体进行多方纠缠源的制备。

上海交通大学光纤所的顾逸、吴旭菲等人利用此方法级联 OPO 和 SFG 过程制备了六方纠缠源^[6]。发生的物理过程是：

$$\text{OPO} : \omega_0 \rightarrow \omega_1 + \omega_2 \quad (3-23)$$

$$\text{SFG1} : \omega_0 + \omega_1 \rightarrow \omega_3 \quad (3-24)$$

$$\text{SFG2} : \omega_0 + \omega_2 \rightarrow \omega_4 \quad (3-25)$$

$$\text{SFG3} : \omega_0 + \omega_3 \rightarrow \omega_5 \quad (3-26)$$

$$\text{SFG4} : \omega_0 + \omega_4 \rightarrow \omega_6 \quad (3-27)$$

$$(3-28)$$

五个过程共生成了 6 束光，可以证明它们是纠缠的。生成它们的晶体需要同时匹配 5 个不同的失配量。本章的方法便可发挥作用。

3.3 本章小结

本章阐述了一种相对高效的准周期非线性光子晶体设计方法及其相应的原理，使用这中方法能够同时匹配多个失配量，并有较好的转化效率。作者将这种方法完整的进行了程序化实现。通过对一维和二维的具体实例进行仿真验证，发现无论是相关图形还是晶体的参数指标，都符合了设计要求以及其他研究者论文中的指标。此外，程序还能够实现可视化、全自动的晶体设计过程。

这一程序化的设计软件，对实验室研究不同的非线性过程应用提供了工具。实验室已有多篇论文(发表或在审)基于这一设计方法的仿真结果完成。

第四章 非线性光子晶体的应用设计

前面的章节已经阐述了非线性光学效应的基础知识和计算方法，以及程序化实现了能同时匹配多个光学参量过程的设计方法。

本章节是作者根据对相关知识的学习和文献的阅读，设计的两个利用非线性光学的参量过程实现的应用。第一个是基于参量下转换级联差频产生效应的五方纠缠源模型的设计，我们设计级联的多个参量过程，并验证了五束光的正则量纠缠。第二个是一个基于啁啾 (chirp) 空间结构非线性光子晶体的两方宽带纠缠源设计，我们理论验证晶体能输出宽带的光子对，且具有不同的偏振，具有精度很高的时间相干性。

4.1 基于参量下转换级联差频产生效应的五方纠缠源模型

现代量子通信 (quantum communication) 和量子计算 (quantum computation) 技术^[15] 正吸引着越来越多的研究者的目光。目前科学家们已经实验验证或者是提出设想了许多种量子技术的应用，如：量子隐态传输、量子密集编码和量子密钥分发等。这些涉及到量子特性的应用中，几乎都离不开量子纠缠 (quantum entanglement)。而光子由于制备容易、性质多而可控，是作为纠缠源的常用来源。

前几章提到的参量下转换过程 (SPDC, spontaneous parametric down-conversion) 就可以生成具有纠缠特性的双光子对 (biphoton)。然而多方纠缠源的制备，在理论和实验上依然是个难题。2012 年，中国科学技术大学的潘建伟教授所在研究组实验观测了八光子纠缠态^[16]，打破了他们自己保持的 2007 年六光子图态 (graph state) 纠缠态^[17] 的光子纠缠态制备世界记录。

目前主要有两种典型的方法制备连续变量 (continuous variable) 多方纠缠源。第一种是级联多个光学参量过程，其中晶体可以用上一章提到的双格法^[13]设计以满足多个失配量。这种方法的优点是效率可以用优化晶体设计来提高。目前，三方、四方纠缠都已经被研究者们用这种方法实现^[18, 19]。另一种方法是通过非平衡分光器 (unbalanced splitter) 混合压缩光束实现^[20]。

本章提出的是基于多参量过程的五方纠缠源的理论设计，并对产生纠缠判据进行了理论分析，验证了其完全五方纠缠特性。

4.1.1 光学过程及其哈密顿量

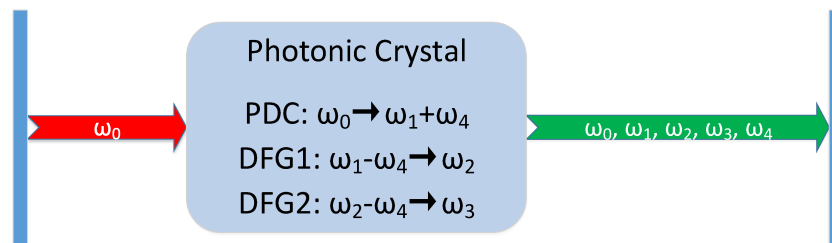


图 4-1 多参量过程制备五方纠缠源

在本文的工作中，设计好的非线性过程发生在放置在腔内的光子晶体中。入射一束泵浦光 ω_0 ，使用一个参量下转换过程 (PDC) 将其降频为信号光和闲置光: ω_1, ω_4 。接下来，信号光的能量在差频产生过程 DFG1 中转移给同频闲置光和第三束光 ω_2 。最后一步， ω_2 又在差频产生过程 DFG2 中产生第四束光 ω_3 。图4-1中，显示了参量过程的示意图及发生的参量过程。

在非线性过程中的能量守恒和动量守恒要求：

$$PDC : \omega_0 = \omega_1 + \omega_4, \quad k_0 = k_1 + k_4 + G_1 \quad (4-1)$$

$$DFG1 : \omega_1 = \omega_2 + \omega_4, \quad k_1 = k_2 + k_4 + G_2 \quad (4-2)$$

$$DFG2 : \omega_2 = \omega_3 + \omega_4, \quad k_2 = k_3 + k_4 + G_3 \quad (4-3)$$

其中 G_1, G_2, G_3 就是需要设计匹配的失配量。

由于我们需要研究的是量子纠缠特性，因此需要在量子理论的描述下分析计算。在量子理论中，光学模式用湮灭算符和产生算符描述 $\hat{a}_i, \hat{a}_i^\dagger$ ($i = 0, 1, \dots, 4$)。系统的时间演化，由描述能量的哈密顿算符 (Hamiltonian) 决定。在之前章节阐述电磁场量子化时，已经介绍过如何由波动理论描述的非线性光学过程推出量子理论中的哈密顿量，即公式2-37。此时我们考虑在海森堡表象下的相互作用哈密顿量 \hat{H}_I 和泵浦光哈密顿量 \hat{H}_p ：

$$H_I = i\hbar(\kappa_1 \hat{a}_0 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_4^\dagger + \kappa_2 \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_4^\dagger + \kappa_3 \hat{a}_2 \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_4^\dagger) + H.c. \quad (4-4)$$

$$H_p = i\hbar \varepsilon_0 \hat{a}_0^\dagger + H.c. \quad (4-5)$$

其中 κ_i ($i=1,2,3$) 是三个参量过程的无量纲非线性耦合系数 (与设计的晶体参数有关)。 ε_0 是泵浦光振幅，设定为实数。 $\hat{\rho}$ 是目标系统的密度矩阵算符。

除此之外还要考虑到腔中第 i 个光学模式的衰减项 (damping term) L_i ：

$$L_i \hat{\rho} = \gamma_i [2\hat{a}_i \hat{\rho} \hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i] \quad (4-6)$$

其中 γ_i ($i = 0, \dots, 4$) 是对应光学模式的衰减系数 (damping rate)。

4.1.2 主方程、福克-普朗克方程及随机微分方程组

由哈密顿量和衰减项的表达式，可以写出主方程 (master equation):

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [H_p + H_I, \hat{\rho}] + \sum_{i=1}^5 L_i \hat{\rho} \quad (4-7)$$

将相应表达式代入，可以得到关于湮灭算符、产生算符和密度矩阵算符的表达式，由此利用转换关系公式2-54可以将其转换成福克-普朗克方程 (Fokker-Planck equation) 的形式:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\sum_i \frac{\partial}{\partial a_i} F_i P + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial a_i \partial a_j} D_{ij} P \quad (4-8)$$

我们用矩阵形式来表示上式，湮灭算符和产生算符本征值构成矩阵 α ; F_i 构成矩阵 F ; D_{ij} 构成二维矩阵 D 。则转换为福克-普朗克方程后得到:

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_0^*, \alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \alpha_4^*)^T \quad (4-9)$$

$$F = \begin{pmatrix} f \\ f^* \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} \gamma_0(\varepsilon - \alpha_0) - \kappa_1 \alpha_1 \alpha_4 \\ -\gamma_1 \alpha_1 + \kappa_1 \alpha_0 \alpha_4^* - \kappa_2 \alpha_2 \alpha_4 \\ -\gamma_2 \alpha_2 + \kappa_2 \alpha_1 \alpha_4^* - \kappa_3 \alpha_3 \alpha_4 \\ -\gamma_3 \alpha_3 + \kappa_3 \alpha_2 \alpha_4^* \\ -\gamma_4 \alpha_4 + \kappa_1 \alpha_0 \alpha_1^* + \kappa_2 \alpha_1 \alpha_2^* + \kappa_3 \alpha_2 \alpha_3^* \end{pmatrix} \quad (4-10)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{d} & 0 \\ 0 & \mathbf{d}^\dagger \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_1 \alpha_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_2 \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_3 \alpha_2 \\ 0 & \kappa_1 \alpha_0 & \kappa_2 \alpha_1 & \kappa_3 \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4-11)$$

福克 - 普朗克方程中的 a_i 就对应矩阵 α 中的第 i 个元素, F_i 、 D_{ij} 以此类推。其中的 $\varepsilon = \varepsilon_0/\gamma_0$ 进行了归一化。再将矩阵 \mathbf{D} 分解得到:

$$\mathbf{D} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T \quad (4-12)$$

引入实数噪声项的矩阵:

$$\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5, \eta_6, \eta_7, \eta_8, \eta_9, \eta_{10}) \quad (4-13)$$

其中每一个 $\eta_i (i = 1, 2, \dots, 10)$ 均为实数噪声, 可以认为是均值为 0, 方差为 1 的高斯分布随机变量。不同的 η_i 之间是相互独立的 (协方差为 0)。

由福克 - 普朗克方程转换成的随机微分方程组为:

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F} + \mathbf{B}\boldsymbol{\eta} \quad (4-14)$$

τ 是光在腔中的平均往返时间 (round-trip time)。这是一种紧凑的表示形式, 把其中的矩阵表达式展开, 等号左右两侧分别是 10 行, 1 列的矩阵, 行与行对应起来, 则可以得到 10 个互相耦合的随机微分方程组。

求解这个随机微分方程组, 我们分为两方面求解 $\alpha_i = \bar{\alpha}_i + \delta\alpha_i$, 一方面是获得系统的稳态 (steady state) 解 $\bar{\alpha}_i$, 另一方面是求得场微小的涨落解 $\delta\alpha_i$ 。在

求解稳态解的过程中，噪声项以及其他涨落 (fluctuation) 均可以忽略。因此，关于腔中场的均值 (稳态解) 的方程组可以写为：

$$\begin{cases} \tau \frac{\partial \bar{\alpha}_0}{\partial t} = \gamma_0(\varepsilon - \bar{\alpha}_0) - \kappa_1 \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_4 \\ \tau \frac{\partial \bar{\alpha}_1}{\partial t} = -\gamma_1 \bar{\alpha}_1 + \kappa_1 \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_4^* - \kappa_2 (\bar{\alpha})_2 \bar{\alpha}_4 \\ \tau \frac{\partial \bar{\alpha}_2}{\partial t} = -\gamma_2 \bar{\alpha}_2 + \kappa_2 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_4^* - \kappa_3 \bar{\alpha}_3 \bar{\alpha}_4 \\ \tau \frac{\partial \bar{\alpha}_3}{\partial t} = -\gamma_3 \bar{\alpha}_3 + \kappa_3 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_4^* \\ \tau \frac{\partial \bar{\alpha}_4}{\partial t} = -\gamma_4 \bar{\alpha}_4 + \kappa_1 \bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_4^* + \kappa_2 \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2^* + \kappa_3 \bar{\alpha}_2 \bar{\alpha}_3^* \end{cases} \quad (4-15)$$

这里只写出了一半方程组的形式，另一半是其复共轭项，与之类似。

在求解此方程组时，由于是稳态解，可以令 $\frac{\partial \bar{\alpha}_i}{\partial t} = 0$ 。由光学参量振荡过程的理论可知：泵浦光强度需要大于阈值 (threshold)： $\varepsilon_c = \frac{\sqrt{74\gamma_1}}{2\kappa_1}$ ，这时才能存在非零的解 $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3, \bar{\alpha}_4$ 。即场的均值解的形式为：

$$(1) \varepsilon < \varepsilon_c : \bar{\alpha}_0 = \varepsilon, \bar{\alpha}_j = 0 \quad (4-16)$$

$$(2) \varepsilon > \varepsilon_c : \bar{\alpha}_0 = |\bar{\alpha}_0|, \bar{\alpha}_1 = |\bar{\alpha}_1| e^{i\theta} \quad (4-17)$$

$$\bar{\alpha}_2 = |\bar{\alpha}_2| e^{-i2\theta}, \bar{\alpha}_3 = |\bar{\alpha}_3| e^{i3\theta}, \bar{\alpha}_4 = |\bar{\alpha}_3| e^{-i\theta} \quad (4-18)$$

其中 θ 是一个不确定的相位项。

我们关心的是幅值信息 $|\bar{\alpha}_i|$ ，它表明了每个模式的光产生的强度情况。求解 $|\bar{\alpha}_i|$ 的解析表达式过程非常艰难，即使求出了解析解，形式也非常复杂，因此我们选择用数值方法求解出稳态解。我们选取了一组符合实际情况的参数： $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0.01, \kappa_1 = \kappa_3 = 6\gamma_0, \kappa_2 = 3\gamma_0, \varepsilon = 2$ 。在这组参数下，解为： $|\bar{\alpha}_0| = 0.158, |\bar{\alpha}_1| = 0.486, |\bar{\alpha}_2| = 0.0600, |\bar{\alpha}_3| = 0.227, |\bar{\alpha}_4| = 0.631$ 。不失一般性，我们假定 $\theta = 0$ 以简化计算过程。

4.1.3 随机微分方程组的线性化求涨落解

在得到了稳态的均值解的情况下，我们就可以线性化方程组4-14，得到关于场的涨落解 $\delta\alpha_i$ 的方程组：

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} \delta\alpha = -M\delta\alpha + B\eta \quad (4-19)$$

其中：

$$M = - \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^* & M_1^* \end{pmatrix} \quad (4-20)$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} -\gamma_0 & -\kappa_1 \bar{\alpha}_4 & 0 & 0 & -\kappa_1 \bar{\alpha}_1 \\ \kappa_1 \bar{\alpha}_4^* & -\gamma_1 & -\kappa_2 \bar{\alpha}_4 & 0 & -\kappa_2 \bar{\alpha}_2 \\ 0 & \kappa_2 \bar{\alpha}_4^* & -\gamma_2 & -\kappa_3 \bar{\alpha}_4 & -\kappa_3 \bar{\alpha}_3 \\ 0 & 0 & \kappa_3 \bar{\alpha}_4^* & -\gamma_3 & 0 \\ \kappa_1 \bar{\alpha}_1^* & \kappa_2 \bar{\alpha}_2^* & \kappa_3 \bar{\alpha}_3^* & 0 & -\gamma_4 \end{pmatrix} \quad (4-21)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_1 \bar{\alpha}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_2 \bar{\alpha}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \kappa_3 \bar{\alpha}_2 \\ 0 & \kappa_1 \bar{\alpha}_0 & \kappa_2 \bar{\alpha}_1 & \kappa_3 \bar{\alpha}_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4-22)$$

线性化过程的正确性需要矩阵 M 的所有本征值有一个正实部来保证^[19]。

在我们实际的数值计算中，这一点很容易验证。

接下来我们可以得到腔中光场在频率域关于湮灭算符特征值 α_i, α_i^* 的协方差矩阵，进而可以得到关于正则算符 ($\hat{X}_i = \frac{\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger}{2}, \hat{P}_i = \frac{\hat{a}_i - \hat{a}_i^\dagger}{2i}$) 的协方差矩阵 (correlation matrix)^[21] $\mathbf{S}(\omega)$ ：

$$\mathbf{S}(\omega) = (\mathbf{M} + i\omega\tau\mathbf{I})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{B}^T(\mathbf{M}^T - i\omega\tau\mathbf{I})^{-1} \quad (4-23)$$

其中 ω 是偏离中心频率的偏移量， \mathbf{I} 是单位矩阵。协方差矩阵中元素的顺序和矢量 ($\hat{X}_0, \hat{X}_1, \hat{X}_2, \hat{X}_3, \hat{X}_4, \hat{P}_0, \hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3, \hat{P}_4$) 中一致，即：矩阵 $\mathbf{S}(\omega)$ 中第 i 行 j 列元素： $S_{ij}(\omega)$ ，为矢量中第 i 个元素和第 j 个元素之间的协方差 ($i = j$ 时为方差)。

考虑到实际的晶体是在腔中，实际观测的光是射入腔之外的。射出腔外的光场协方差矩阵 $\mathbf{S}^{out}(\omega)$ 的元素有如下关系^[21]：

$$S_i^{out}(\omega) = 1 + 2\gamma_i S_i(\omega) \quad (4-24)$$

$$S_{ij}^{out}(\omega) = 2\sqrt{\gamma_i\gamma_j} S_{ij}(\omega), \quad (4-25)$$

其中 $\gamma_i = \gamma_{i-5}, (i \geq 5)$ 。

4.1.4 纠缠判据及纠缠验证

得到了关于正则算符的协方差矩阵之后，我们就可以用连续变量多方纠缠的充分不可分 (inseparability) 判据^[22] 来判断其是否具有纠缠。我们预期是泵浦光与生成的 4 束光都纠缠。

完整的不可分判据一共包含 10 个不等式。我们需要排除所有部分纠缠的情况，以保证其五方完全纠缠。经过分析可以发现，至少 4 个不等式需要满足以保证完全不可分特性。在这里，我们选取如下 4 个不等式来研究其纠缠特

性，当 4 个不等式同时被违背时，认为五方纠缠成立。

$$S_{01} = \mathbf{D}(\hat{X}_0 - \hat{X}_1) + \mathbf{D}(\hat{P}_0 + \hat{P}_1 + g_2\hat{P}_2 + g_3\hat{P}_3 + g_4\hat{P}_4) \geq 1 \quad (4-26)$$

$$S_{12} = \mathbf{D}(\hat{X}_1 - \hat{X}_2) + \mathbf{D}(g_0\hat{P}_0 + \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + g_3\hat{P}_3 + g_4\hat{P}_4) \geq 1 \quad (4-27)$$

$$S_{23} = \mathbf{D}(\hat{X}_2 + \hat{X}_3) + \mathbf{D}(g_0\hat{P}_0 + g_1\hat{P}_1 + \hat{P}_2 - \hat{P}_3 + g_4\hat{P}_4) \geq 1 \quad (4-28)$$

$$S_{34} = \mathbf{D}(\hat{X}_3 - \hat{X}_4) + \mathbf{D}(g_0\hat{P}_0 + g_1\hat{P}_1 + g_2\hat{P}_2 + \hat{P}_3 + \hat{P}_4) \geq 1 \quad (4-29)$$

其中 \mathbf{D} 表示求方差， g_i 为任意的实数系数。

上述 4 个不等式应该这样理解：4 个不等式互相之间是单独考虑的；不同不等式中名称相同的系数 g_i 可以取不同的值；对于每一个不等式来说，只要能找到一组实数系数 g_i ，使得不等式关系被违背，即可认为此条判据满足；4 条判据分别满足之后，即可认为五方纠缠成立。

具体求解不等式左侧值的时候，用到统计学中的计算公式：

$$\mathbf{D}(A + B) = \mathbf{D}(A) + \mathbf{D}(B) + 2\text{Cov}(A, B) \quad (4-30)$$

$$\mathbf{D}(\hat{A} + \hat{B}) = \mathbf{D}(\hat{A}) + \mathbf{D}(\hat{B}) + \text{Cov}(\hat{A}, \hat{B}) + \text{Cov}(\hat{B}, \hat{A}) \quad (4-31)$$

其中 A, B 为随机变量， \hat{A}, \hat{B} 为算符。对于随机变量而言，协方差的顺序不重要，而算符通常不满足交换律，因此求协方差顺序会导致结果的不同。

用上述公式展开判据不等式组后，左侧每一项都是关于 \hat{X}_i, \hat{P}_i 的方差，或者是两两之间协方差的项，这些值都可以从协方差矩阵 $\mathbf{S}^{out}(\omega)$ 的对应位置直接得到。

此外，对与每一个 g_i 而言，左侧为一个一元二次多项式，其最值点所在位置很容易求得。因此，可以很方便的优化参数 g_i ，取得左侧的最小值。

在数值计算的过程中，我们选取了不同的泵浦光振幅参数 ε_0 。实验发现，

当 ε_0 小于阈值时，即使调节其他参数也难以获得五方纠缠，这是因为此时 4 束生成光均值为 0，即能量非常小。而当 ε_0 大于阈值时，可以获得比较理想的五方纠缠特性，

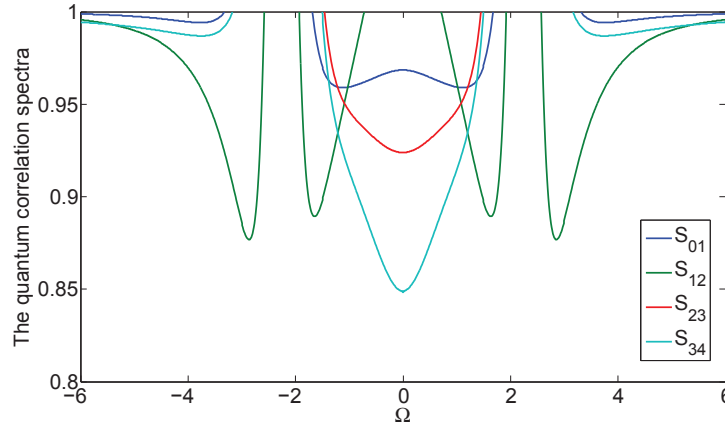


图 4-2 五方纠缠判据

我们经过实验选取了一组参数，以演示五方纠缠的效果。参数为： $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = 0.01$ ， $\kappa_1 = \kappa_3 = 6\gamma_0$ ， $\kappa_2 = 3\gamma_0$ ， $\varepsilon = 2$ 。此时 ε_0 大于阈值，且矩阵 \mathbf{M} 本征值都有正实部（即线性化是正确的）。在不同的偏移频率 ω 下，代入到 $\mathbf{S}^{out}(\omega)$ ，并计算 4 个不等式左侧多项式，得到判据表达式图。

图中的横坐标是归一化分析频率 $\Omega = \omega\tau/\gamma_1$ ，纵坐标是归一化的不等式左侧多项式的值。从图中可以看出，在特定频率范围内，存在 4 个判据表达式都小于 1 的情况，即 4 个判据均被违背，五方纠缠源制备成功。

4.2 基于啁啾结构非线性光子晶体的两方宽带纠缠源模型

一般的非线性光子晶体设计方法只能匹配单一的失配量（或是有限多个）。但在有些应用要求下，希望一块晶体能够匹配宽带的光学过程，或者是生成宽带光子。在这种情况下，之前的设计方法不再奏效。

一种实现宽带光子对的制备方法是由 S. E. Harris 提出的基于啾啾 (chirp) 空间结构的设计方法^[23]。在这种方法中，他让一束单频光入射进二阶极化率被调制成啾啾结构的晶体中，由于啾啾结构本身就具有宽频特性，能匹配多个不同的参量下转换过程，因此输出光是宽频的。但是，原作者使用的是 Type-I 型参量下转换过程，即入射光和两束输出光都是非常光 (e 光)，输出光通过分频或由色散导致的出射时间差进行分离。南京大学的研究员们也理论计算过和频产生过程 (SFG) 作用在啾啾晶体上的纠缠特性^[24]。

后又有日本的研究者们做出了改进^[25]，他们研究了非共线的自发参量下转换过程并做了实验，即：产生的双光子沿着不同方向出射。这种改进使得分离出射光更加容易，又能克服原本由于分频设备的使用造成的效率损失。他们的研究指出：使用非共线方法能够用更小啾啾度 (chirp degree) 的晶体获得同样好的光子产生效率。

本文的工作从另一方面做出改进：利用 Type-II 型自发参量下转换过程进行了优化，使输出光分别为寻常光 (o 光) 和非常光 (e 光)，它们处在不同偏振态上，能够用一个简单的偏振分离器 (PBS, polarizing beam splitter) 分开，实验更简便，效率也更高。

本文的工作还可以进一步拓展，结合非共线方法后，能够设计宽带的三方光子对，使得其中两束偏振不同，另一束与前两者出射角度不同，实现三束光的简便分离。

4.2.1 啾啾结构及 Type-II 型自发参量下转换

如图所示，图中深浅不同的蓝色区域就是设计好的晶体，其中深蓝色和浅蓝色表示极化率的不同。

所谓啾啾 (chirp) 的空间结构，指的就是极化率随空间位置变化的快慢程度随空间位置变化的结构。具体来说，图中最左端，光刚进入时，极化率改变的

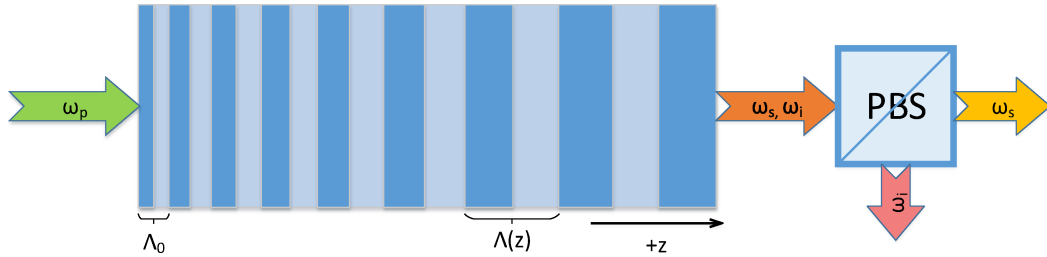


图 4-3 啁啾空间结构示意图

局部周期是 Λ_0 ，而随着逐渐往右传播，局部周期不断增大。如果用 $\Lambda(z)$ 表示局部周期函数，则局部频率为：

$$K(z) \equiv \frac{2\pi}{\Lambda(z)} - \frac{2\pi}{\Lambda_0} = \xi z = K_0 - \xi z \quad (4-32)$$

上式是假定了为线性啁啾结构，即局部频率函数 $K(z)$ 随空间位置 z 线性变化。其中 ξ 称为啁啾度 (chirp degree)，描述极化率速度随空间变化的快慢； K_0 为初始位置的局部频率。

由局部频率的表达式，可以写出极化率随空间变化的表达式 $Q(z)$ ：

$$Q(z) = e^{\int_0^z K(z') dz'} = e^{iK_0 z + i\frac{\xi z^2}{2}} \quad (4-33)$$

此处并不严谨，有两点理想化近似：一是认为极化率的大小是可以连续取值的，这在实验中还无法做到；二是省略了 $Q(z)$ 的负频率项，使得它并不是一个有物理意义的实数。对于第一点近似，通过对连续取值和离散取值两种情况下的频谱分析，可以认为两者的差别不大，而且这种近似确实可以带来计算上的巨大便捷；对于第二点近似，在正频率和负频率项发生的物理过程是一致的，我们只需要在接下来的计算中只考虑正频率部分即可，这种近似省去了共轭项参与计算的麻烦。

4.2.2 海森堡方程近似解析解

参考 S. E. Harris 在论文中的计算方法^[23]，我们也是用海森堡绘景下的方程来求解。

假设一束单色光 ω_p 射入，产生宽带信号光 $\omega_s = \omega$ 和闲置光 $\omega_i = \omega_p - \omega$ ，其中 $\omega_p/2 \leq \omega \leq \omega_p$ 。这就规定了两束光以 $\omega_p/2$ 频率为分界，可以被区分。光子一般用湮灭算符来表示，即 $\hat{a}(t, z)$ ，它描述在海森堡绘景下，在 t 时刻、 z 位置处出现该模式光子的概率。由于我们关心的稳态之后各频率光子的信息，因此用湮灭算符在频域的对应形式来计算：

$$\hat{a}(\omega, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{a}(t, z) e^{-i\omega t} dt \quad (4-34)$$

接着，又可以假设各束光在一个波长范围内，近似认为振幅不变。用 $\hat{b}(\omega, z)$ 来表示光的振幅算符，则有： $\hat{a}(\omega, z) = \hat{b}(\omega, z) e^{ik(\omega)z}$ 。写出哈密顿算符，并代入到海森堡方程2-42中，列出耦合方程组：

$$\frac{\partial \hat{b}_s}{\partial z} = i\kappa \hat{b}_i^\dagger e^{i\frac{\xi z^2}{2} + i\Delta k(\omega)z} \quad (4-35)$$

$$\frac{\partial \hat{b}_i^\dagger}{\partial z} = -i\kappa^* \hat{b}_s e^{-i\frac{\xi z^2}{2} - i\Delta k(\omega)z} \quad (4-36)$$

其中 κ 为非线性转换系数，可以认为是与材料性质相关的常数。而 $\Delta k(\omega)$ 表示初始入射位置处的失配量 $\Delta k(\omega) = k_p - k_s - k_i - K_0$ ，由于这里 s, i 光均为宽带，参数 ω 取值不同时，对应的是完全不同的参量过程，失配量也随之改变，故 $\Delta k, k_s, k_i$ 均为 ω 的函数。

在我们设计的 Type-II 型自发参量下转换过程中，假定 p, s 光为非常光 (e

光), i 光为寻常光(o 光), 于是有:

$$k_p = \frac{n_e(\omega_p) \cdot \omega_p}{c} \quad (4-37)$$

$$k_s = \frac{n_e(\omega) \cdot \omega}{c} \quad (4-38)$$

$$k_i = \frac{n_o(\omega_p - \omega) \cdot (\omega_p - \omega)}{c} \quad (4-39)$$

式中 n_e, n_o 分别为非常光和寻常光的折射率方程。 c 为真空中的光速。

在不涉及到啁啾结构 ($\xi = 0$), 且相位完全匹配 ($\Delta k = 0$) 时, 上述方程很容易求出解析解, 即典型的非简并 (nondegenerate) 参量下转换过程。而在此例中, 解析解几乎不可得。于是我们此处用到一个近似来解耦合^[23]: 由于整个过程光振幅的增益非常小, 我们在求解每个方程时认为右侧的自变量与其初始值相同。即: 用 $\hat{b}_s(\omega, 0)$ 和 $\hat{b}_i^\dagger(\omega, 0)$ 替代方程右侧的 $\hat{b}_s(\omega, z)$ 和 $\hat{b}_i^\dagger(\omega, z)$ 。如此一来, 方程不再耦合, 并可以求出解析解:

$$\hat{a}_s(\omega, z) = A_1(\omega)\hat{a}_s(\omega, 0) + B_1(\omega)\hat{a}_i^\dagger(\omega, 0) \quad (4-40)$$

$$\hat{a}_i^\dagger(\omega, z) = C_1(\omega)\hat{a}_s(\omega, 0) + D_1(\omega)\hat{a}_i^\dagger(\omega, 0) \quad (4-41)$$

$$A_1(\omega) = e^{ik_s z}, D_1(\omega) = e^{-ik_i z}, C_1(\omega) = B_1^*(\omega)e^{ik_s z - ik_i z} \quad (4-42)$$

$$B_1(\omega) = \frac{(i-1)\kappa\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\xi}} e^{ik_s z - \frac{i\Delta k^2(\omega)}{2\xi}} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{(i-1)\Delta k^2(\omega)}{2\sqrt{\xi}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{(i-1)(\Delta k^2(\omega) + \xi z)}{2\sqrt{\xi}} \right) \right] \quad (4-43)$$

我们可以观察不同频率光的输出强度。光强可以用粒子数态来描述:

$\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ 。测量粒子数物理量得到：

$$\langle 0 | \hat{n}_s | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_s | 0 \rangle = \langle 0 | [A_1^* \hat{a}_s^\dagger(\omega, 0) + B_1^* \hat{a}_i(\omega, 0)] \quad (4-44)$$

$$\times [A_1 \hat{a}_s(\omega, 0) + B_1 \hat{a}_i^\dagger(\omega, 0)] | 0 \rangle = B_1^* B_1 \quad (4-45)$$

$$\langle 0 | \hat{n}_i | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i | 0 \rangle = \langle 0 | [C_1 \hat{a}_s(\omega, 0) + D_1 \hat{a}_i^\dagger(\omega, 0)] \quad (4-46)$$

$$\times [C_1^* \hat{a}_s^\dagger(\omega, 0) + D_1^* \hat{a}_i(\omega, 0)] | 0 \rangle = C_1^* C_1 \quad (4-47)$$

由于在海森堡绘景下，量子态在整个过程前后不发生改变，而在过程的开始， s, i 光均不存在，为真空态 $|0\rangle$ ，上式的计算用到了对易关系 $[\hat{a}_m, \hat{a}_n^\dagger] = \delta_{mn}$ 。

4.2.3 时间相干性

正如 S. E. Harris 在其论文中^[23] 指出的：啁啾结构的一种重要应用是能够产生单周期双光子对 (single-cycle biphoton)。

我们知道一个信号在时域持续时间越短，在频域的频谱越宽；而频谱很宽的信号，却不一定时域很短。一个典型的反例是太阳光，它几乎覆盖了全部频谱，但时域上依然很长。这是因为缺少了频谱分量同相位 (in phase) 的条件。

当一束光脉冲的带宽与其中心频率相当，且频谱成分均同相位时，其波形便称为单周期。在啁啾结构中，生成的双光子对，频率是互补的，具有宽带和同相位的特性，具有很好的时间相干性，因此称为单周期双光子。

我们用特征相干时间 (characteristic coincidence time) 来评价生成双光子对的效果，特征相干时间越小，表明脉冲压缩的程度越好。测量相干时间的系统框图如图4-4所示。

首先，射出啁啾晶体的 s 光的功率谱密度为：

$$S(\omega) = \int \langle 0 | \hat{a}_s^\dagger(\omega_1) \hat{a}_s(\omega_2) | 0 \rangle e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t} d(\omega_2 - \omega_1) = \frac{|B_1(\omega)|^2}{2\pi} \quad (4-48)$$

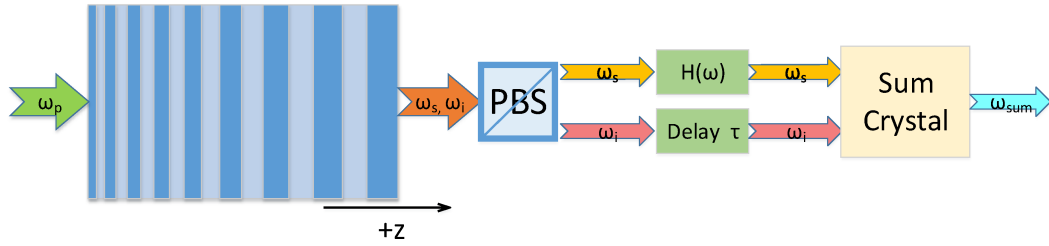


图 4-4 时间相干性的测量

则总的成对计数率 (paired rate) 与输出总功率成正比 (认为单光子能量几乎相同) 为 $R = \int_{\omega_p/2}^{\omega_p} S(\omega) d\omega$ 。

图4-4中的测量过程是让纠缠晶体输出的光进入到一个和频晶体中，当入射的两束光的光子能成对匹配时 (之前由同一个光子分裂成)，和频晶体输出的和频光强度最高。由于存在色散，生成的宽带的信号光、闲置光传播的速度不同，不能够同时到达和频晶体，因此用下述传输函数对 s 光进行相位补偿：

$$H(\omega) = e^{i[\frac{\Delta k^2(\omega)}{2\epsilon} - (k_s + k_i)z]} \quad (4-49)$$

$$G(\omega, \tau) = e^{-i(\omega_p - \omega)\tau} \quad (4-50)$$

这里的相位补偿仅仅对 s 光进行。思路是使得 s 光的相位与 i 光相同，于是就不需要对 i 光再进行操作。但是，由于 s, i 光整体的传播速度有很大差别，故相位补偿之后， i 光需要延迟一段时间 τ ，以实现和 s 光同时到达和频晶体，延迟对应于传输函数 $G(\omega, \tau)$ 。

s, i 光分别处理后, 得到的光束对应系数改为为:

$$A(\omega) = H(\omega)A_1(\omega) \quad (4-51)$$

$$B(\omega) = H(\omega)B_1(\omega) \quad (4-52)$$

$$C(\omega, \tau) = G(\omega, \tau)C_1(\omega) \quad (4-53)$$

$$D(\omega, \tau) = G(\omega, \tau)D_1(\omega) \quad (4-54)$$

生成和频光子率为:

$$R_{sum}(\tau) = \eta_1 \left[R^2 + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_p/2}^{\omega_p} A(\omega)C^*(\omega, \tau)d\omega \right|^2 \right] \quad (4-55)$$

其中, η_1 为和频转换的效率因子 (efficiency factor)。式子中的第一项表明, 和频产生的情况如入射光功率的平方成正比; 第二项则表明与双光子组成的波函数的振幅模方成正比。

通过 R_{sum} 的图形即可看出啁啾结构对双光子时间压缩效果。产生的双光子, 只在一个非常狭窄的时间差 τ 内有很强的相干性。

4.2.4 一个仿真实例

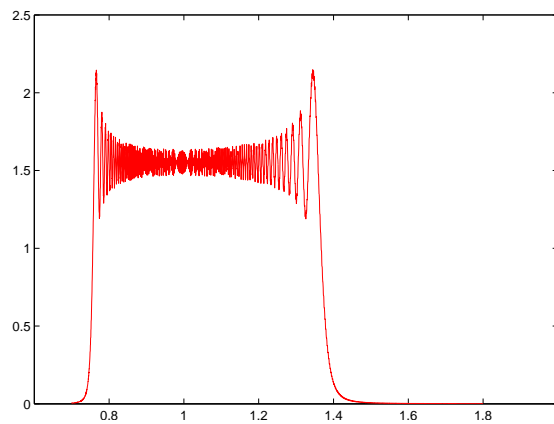
我们选取了一组数据实例进行理论仿真研究: 选取的晶体材料为 BaB_2O_4 (BBO) 晶体; 啁啾晶体长度为 2cm; 非线性转化率 $\kappa = 0.01$; 晶体入射光波长 $\lambda_p = 0.42\mu\text{m}$; 在入射端匹配信号光波长为 $0.75\mu\text{m}$ 的过程; 在出射端, 匹配信号光波长为 $1.33\mu\text{m}$ 。

BaB₂O₄(BBO) 晶体的折射率有其谢米尔方程 (Sellmeier equation) 确定^[26]:

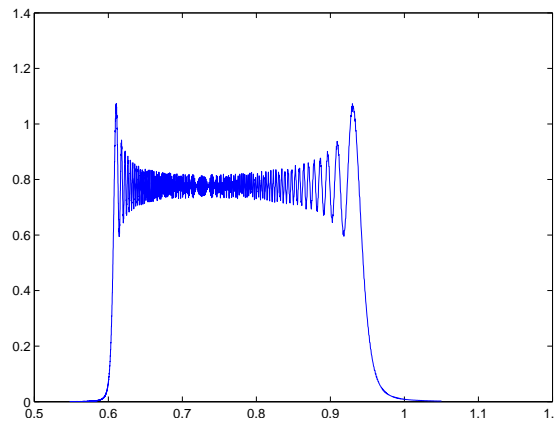
$$n_o^2(\lambda) = 2.7359 + \frac{0.01878}{\lambda^2 - 0.01822} - 0.01354\lambda^2 \quad (4-56)$$

$$n_e^2(\lambda) = 2.3753 + \frac{0.01224}{\lambda^2 - 0.01667} - 0.01516\lambda^2 \quad (4-57)$$

得到的输出光的强度图为: 上图横坐标分别为 s, i 的波长 (单位: μm), 纵



(a) 啁啾结构实例 s 光强度



(b) 啁啾结构实例 i 光强度

图 4-5 啁啾结构实例输出光频谱

坐标为强度。有图中可以看出, 输出的两束光确实具有宽带特性, 且 s 光的带宽范围与设计的一致。

进而根据上一节推导的公式，可以画出反映时间相干特性的生成和频光子速率 $R_{sum}(\tau)$ ：

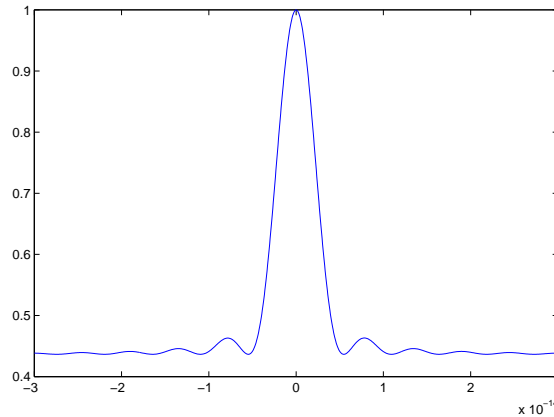


图 4-6 啁啾结构实例时间相干

图的横坐标为时间 τ (单位是秒)，纵坐标为归一化后的相关函数。图中可以明显看出有一个峰值，即在一个很窄的时间范围内，有很强的相干性。图中的时间宽度约为 5 飞秒左右。

4.3 本章小结

本章中，我们根据前面章节的基础知识和非线性光子晶体的设计方法，建立了两个非线性光学的应用模型。

第一个是利用多非线性参量过程，理论上制备出了五方纠缠的纠缠源，具体来说是用了一个参量下转换过程级联了两个差频产生过程，制备得到五方纠缠源有很好的纠缠特性，在利用光子晶体设计方法的基础上，可以实现在一块晶体内实现整个过程。

第二个模型是在其他研究者研究工作的基础上做了一点改进，在啁啾空间结构的晶体上研究 Type-II 型自发参量下转换过程。我们的设计不仅能够实现原有 Type-I 型过程的性质(如：产生宽带的双光子，有极短的相干时间等)，还

能够更加方便的分离输出光，提高了效率。

其中本章的第一个工作已经投稿至 **Applied Physics Express**。

第五章 多方连续变量量子相干信道模型设计

通信和信息技术飞速发展，如今人们的生活已经离不开各种各样通信设备和计算技术。量子理论的研究吸引了许多学者的目光，很大程度上也是因为它在通信和计算领域展现出的巨大前景^[15]。

量子计算 (quantum computation) 技术理论上能够超越图灵机的限制，能够解决比图灵问题 (Turing problem) 更为复杂的一大类问题。这将直接引起计算领域和人们生活的巨大变革：目前使用的各类密钥体现都不再安全，计算、数学领域的难题将有望解决，真正意义的人工智能有可能实现等。然而，由于巨大的理论和实践难度，量子计算机还主要停留在理论阶段。量子通信 (quantum communication) 技术是利用量子力学效应 (主要是量子纠缠) 进行消息的传递。其很多应用已经可以进入实用阶段，比较典型的如量子密钥分发 (QKD, quantum key distribution)。它根据量子的不可克隆 (no-cloning) 特性可以实现真正地无条件安全密钥分发。

本章的重点在量子通信。信道 (communication channel) 是通信过程中的重要要素。A. Harrow 等人在 2004 年第一次提出了相干信道^[2](coherent channel) 的概念，这是一种介于经典信道 (classical channel) 和量子信道 (quantum channel) 之间的信道，其中传递的离散信息被称为相干比特 (cobit)，介于经典比特 (bit) 和量子比特 (qubit) 之间。2007 年，M. M. Wilde 等人做了拓展^[27]，使之能够通过连续变量信息，他们称之为相干奈特 (conat)。

我们的研究拓展了连续变量相干信道的概念，使其从原来的两方通信拓展到了任意多方 (multi-partite) 通信。其实现过程需要使用纠缠源和光学耦合，正是前几章设计的模型涉及的内容。

5.1 经典信道、量子信道与量子相干信道

量子通信技术的发展使信道的定义发生了改变。我们传统中使用的信道称为经典信道 (classical channel)，符合一般量子通信要求的信道称为量子信道 (quantum channel)，而 A. Harrow 等人又提出了一种介于两者之间的量子相干信道 (coherent channel)。

为了说明三种信道的区别，我们假定需要进行如下的通信过程：发送方爱丽丝 (Alice) 希望发送离散的信息 $|x\rangle^A$, ($x \in \{0, 1\}$)，接受方鲍勃 (Bob) 实际接收到了信息 $|x\rangle^B$ ，通信过程中还有一个窃听者伊芙 (Eve)(或者认为是通信环境) 也收到了部分信息 $|x\rangle^E$ 。三种不同的信道，实际上对应三种映射关系^[2]，有：

经典信道 在经典信道中， $|x\rangle$ 称为一个经典比特 (cbit)。信道中发生了如下过程： $|x\rangle^A \rightarrow |x\rangle^B|x\rangle^E$ ，即：Alice 发送的信息完全被 Bob 收到，而 Eve 也毫无损失的获得了一份拷贝。

量子信道 在量子信道中， $|x\rangle$ 称为一个量子比特 (qubit)。信道中发生了如下过程： $|x\rangle^A \rightarrow |x\rangle^B$ ，即：Alice 需要发送的信息完整的被 Bob 接收到，而 Eve 什么也没有获取到。整个过程中，态 $|x\rangle$ 只存在一份。满足量子不可克隆定理 (quantum no-cloning theorem)，也保证了安全性。

量子相干信道 在量子信道中， $|x\rangle$ 称为一个相干比特 (cobit)。信道中发生了如下过程： $|x\rangle^A \rightarrow |x\rangle^A|x\rangle^B$ 。此时，发送方和接受方同时获取了一份信息。在这种情况下，假设要在此信道传输任意量子比特： $|\psi\rangle^A = \alpha|0\rangle^A + \beta|1\rangle^A$ ，信道产生的量子态为： $|\phi\rangle^{AB} = \alpha|0\rangle^A|0\rangle^B + \beta|1\rangle^A|1\rangle^B$ 。整个过程保持了 Alice 最初量子态的相干叠加特性不变，因而得名。

M. M. Wilde 等人拓展到连续变量的相干信道^[27]，并称之为相干奈特 (conat) 信道。在他们的工作中，提出了两种理想模型定义：一种是位置正则

量 (PQ, position-quadrature) 相干奈特信道, 一种是动量正则量 (MQ, momentum-quadrature) 相干信道, 即分别将光子的两个正则量上加载上连续信息进行发送。在薛定谔绘景下, 这一过程分别为: $|x\rangle^A \rightarrow |x\rangle^A|x\rangle^B$ 和 $|p\rangle^A \rightarrow |p\rangle^A|p\rangle^B$, 其中 $|x\rangle$ 和 $|p\rangle$ 分别是位置和动量正则量的本征态。

5.2 多方连续变量量子相干信道

之前研究者们研究都集中在两方的量子相干信道上, 即发送方 Alice 发给唯一的接收者 Bob, 最终 Alice 和 Bob 各自拥有一份信息。这种情况显然有很大的局限性, 不适用于经典通信中类似于广播 (broadcast) 等的工作方式。

我们的研究是将相干信道拓展到多方情形下。为了叙述方便, 作如下假定: 通信系统有唯一的发送方 Alice, 记为 A; 有 n 个接收方 Alice、Bob、Claire、...、Nick, 记为 A', B', C', ..., N'。其中需要注意的是 Alice 既是发送方也是接收方, 这也是相干信道所要求的。

5.2.1 多方连续变量量子相干信道的定义

我们首先拓展概念, 给出多方信道的定义。

首先是多方位置正则量 (PQ, position quadrature) 相干信道 (下称为 PQ 相干信道) $\tilde{\Delta}_X$, 它将发送方 Alice 的位置正则量 \hat{x}_A 发送到 n 个接收方的 \hat{x} 上, 这个复制过程是有噪声的。整个过程类似于多方 Greenberger-Horne-Zeilinger (GHZ) 纠缠态^[28], 区别在于接收方多个模式的动量正则量和与发送方近似相等, 而 GHZ 纠缠态的动量和为 0。

定义 5.1 (PQ 多方相干信道). 对应于映射关系:

$$[\hat{x}_A \hat{p}_A]^T \rightarrow [\hat{x}_{A'} \hat{p}_{A'} \hat{x}_{B'} \hat{p}_{B'} \cdots \hat{x}_{N'} \hat{p}_{N'}]^T \quad (5-1)$$

需要满足约束条件：

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_{A'} = \hat{x}_A \\ \hat{x}_{B'} = \hat{x}_A + \hat{x}_{\Delta_X}^1 \\ \hat{x}_{C'} = \hat{x}_A + \hat{x}_{\Delta_X}^2 \\ \vdots \\ \hat{x}_{N'} = \hat{x}_A + \hat{x}_{\Delta_X}^{n-1} \\ \hat{p}_{A'} = \hat{p}_A + \hat{p}_{\Delta_X} \end{array} \right. \quad (5-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \hat{x}_{\Delta_X}^1 \rangle = \langle \hat{x}_{\Delta_X}^2 \rangle = \dots = \langle \hat{x}_{\Delta_X}^{n-1} \rangle = 0 \\ \langle \hat{p}_{A'} + \hat{p}_{B'} + \hat{p}_{C'} + \dots + \hat{p}_{N'} \rangle = \langle \hat{p}_A \rangle \Leftrightarrow \langle \hat{p}_{\Delta_X} + \hat{p}_{B'} + \hat{p}_{C'} + \dots + \hat{p}_{N'} \rangle = 0 \\ \langle (\hat{x}_{\Delta_X}^1)^2 \rangle \leq \varepsilon_1 \\ \langle (\hat{x}_{\Delta_X}^2)^2 \rangle \leq \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \langle (\hat{x}_{\Delta_X}^{n-1})^2 \rangle \leq \varepsilon_{n-1} \\ \langle (\hat{p}_{\Delta_X} + \hat{p}_{B'} + \hat{p}_{C'} + \dots + \hat{p}_{N'})^2 \rangle \leq \varepsilon_n \end{array} \right. \quad (5-3)$$

其中 $\langle \hat{A} \rangle$ 和 $\langle \hat{A}^2 \rangle$ 分别表示海森堡绘景下算符的均值和方差。

上述过程中，Alice 的位置正则量没有改变，并且被复制到了 n 接收方的位置正则量上，附加噪声分别为： $\hat{x}_{\Delta_X}^1, \hat{x}_{\Delta_X}^2, \dots, \hat{x}_{\Delta_X}^{n-1}$ 。所有接收方的动量正则量只和与 Alice 最初的近似相同。参数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 从噪声的角度刻画了信道

的性能。

上式中还满足对易关系：

$$[\hat{x}_{A'}, \hat{p}_{A'}] = [\hat{x}_{B'}, \hat{p}_{B'}] = \cdots = [\hat{x}_{N'}, \hat{p}_{N'}] = i \quad (5-4)$$

多方动量正则量 (MQ, momentum quadrature) 相干信道的定义与上述定义类似。Alice 的 \hat{p}_A 被复制给接收方，而总的位置正则量几乎和初始相同。

定义 5.2 (MQ 多方相干信道). 对应于映射关系：

$$[\hat{x}_A \hat{p}_A]^T \rightarrow [\hat{x}_{A'} \hat{p}_{A'} \hat{x}_{B'} \hat{p}_{B'} \cdots \hat{x}_{N'} \hat{p}_{N'}]^T \quad (5-5)$$

需要满足约束条件：

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{p}_{A'} = \hat{p}_A \\ \hat{p}_{B'} = \hat{p}_A + \hat{p}_{\Delta P}^1 \\ \hat{p}_{C'} = \hat{p}_A + \hat{p}_{\Delta P}^2 \\ \vdots \\ \hat{p}_{N'} = \hat{p}_A + \hat{p}_{\Delta P}^{n-1} \\ \hat{x}_{A'} = \hat{x}_A + \hat{x}_{\Delta P} \end{array} \right. \quad (5-6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \langle \hat{p}_{\Delta_P}^1 \rangle = \langle \hat{p}_{\Delta_P}^2 \rangle = \cdots = \langle \hat{p}_{\Delta_P}^{n-1} \rangle = 0 \\
 \langle \hat{x}_{A'} + \hat{x}_{B'} + \hat{x}_{C'} + \cdots + \hat{x}_{N'} \rangle = \langle \hat{x}_A \rangle \Leftrightarrow \langle \hat{x}_{\Delta_P} + \hat{x}_{B'} + \hat{x}_{C'} + \cdots + \hat{x}_{N'} \rangle = 0 \\
 \langle (\hat{p}_{\Delta_P}^1)^2 \rangle \leq \varepsilon_1 \\
 \langle (\hat{p}_{\Delta_P}^2)^2 \rangle \leq \varepsilon_2 \\
 \vdots \\
 \langle (\hat{p}_{\Delta_P}^{n-1})^2 \rangle \leq \varepsilon_{n-1} \\
 \langle (\hat{x}_{\Delta_P} + \hat{x}_{B'} + \hat{x}_{C'} + \cdots + \hat{x}_{N'})^2 \rangle \leq \varepsilon_n
 \end{array} \right. \quad (5-7)$$

经典对易关系同样满足。

5.2.2 多方连续变量量子相干信道的实现

给出了多方相干信道定以后，我们设计了两种相干信道的实现手段。

5.2.2.1 基于 GHZ 纠缠态和经典信道辅助的相干信道实现

在这种实现方法中， n 方连续变量相干信道的实现需要制备好的 $(n+1)$ 方 GHZ 纠缠态和经典通信信道。下面我们以一个 3 方 PQ 相干信道的实现为例，说明这一过程。我们会将其推广到任意 n 方 PQ 信道情形，MQ 相干信道的情形可以类推。

在此实现中，发送方 Alice 拥有待发送的模式 A。此外，Alice, Bob, Claire 三人共同拥有一个四方 GHZ 纠缠态：A₁, A₂, B, C。其中 A₁, A₂ 为 Alice 拥有，B 为 Bob 所有，C 为 Claire 所有。

我们使用 Loock 等人的协议^[29] 由四个初始真空态 $(\hat{x}_1^{(0)}, \hat{p}_1^{(0)}, \hat{x}_2^{(0)}, \hat{p}_2^{(0)}, \hat{x}_3^{(0)}, \hat{p}_3^{(0)}, \hat{x}_4^{(0)}$ and $\hat{p}_4^{(0)}$) 开始，先压缩成压缩态 (压缩因子分别为 r_1, r_2, r_3, r_4)，最终生

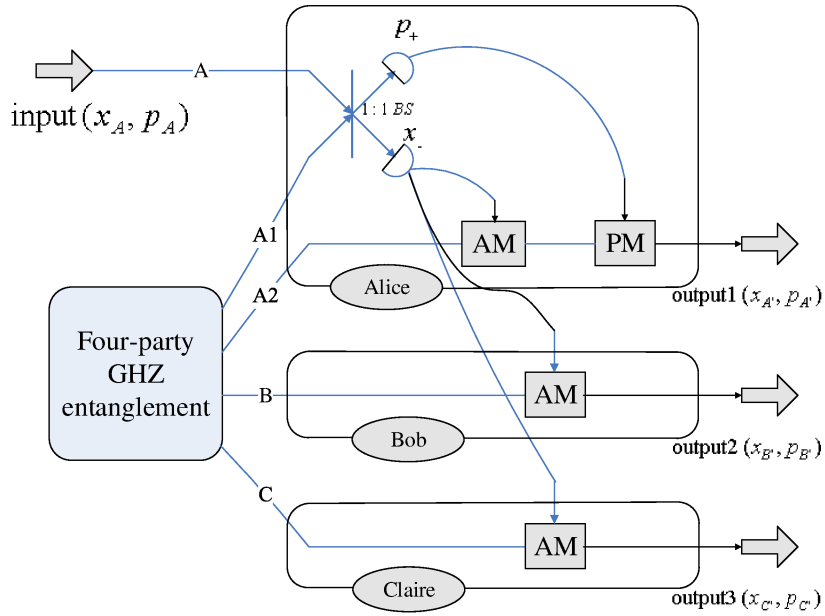


图 5-1 基于 GHZ 纠缠态和经典信道辅助的相干信道实现

成 GHZ 纠缠态:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_{A_1} = \frac{1}{\sqrt{4}}e^{+r_1}\hat{x}_1^{(0)} + \sqrt{\frac{3}{4}}e^{-r_2}\hat{x}_2^{(0)} \\ \hat{p}_{A_1} = \frac{1}{\sqrt{4}}e^{-r_1}\hat{p}_1^{(0)} + \sqrt{\frac{3}{4}}e^{+r_2}\hat{p}_2^{(0)} \\ \hat{x}_{A_2} = \frac{1}{\sqrt{4}}e^{+r_1}\hat{x}_1^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{12}}e^{-r_2}\hat{x}_2^{(0)} + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-r_3}\hat{x}_3^{(0)} \\ \hat{p}_{A_2} = \frac{1}{\sqrt{4}}e^{-r_1}\hat{p}_1^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{12}}e^{+r_2}\hat{p}_2^{(0)} + \sqrt{\frac{2}{3}}e^{+r_3}\hat{p}_3^{(0)} \\ \hat{x}_B = \frac{1}{\sqrt{4}}e^{+r_1}\hat{x}_1^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{12}}e^{-r_2}\hat{x}_2^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{6}}e^{-r_3}\hat{x}_3^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-r_4}\hat{x}_4^{(0)} \\ \hat{p}_B = \frac{1}{\sqrt{4}}e^{-r_1}\hat{p}_1^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{12}}e^{+r_2}\hat{p}_2^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{6}}e^{+r_3}\hat{p}_3^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{+r_4}\hat{p}_4^{(0)} \\ \hat{x}_C = \frac{1}{\sqrt{4}}e^{+r_1}\hat{x}_1^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{12}}e^{-r_2}\hat{x}_2^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{6}}e^{-r_3}\hat{x}_3^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-r_4}\hat{x}_4^{(0)} \\ \hat{p}_C = \frac{1}{\sqrt{4}}e^{-r_1}\hat{p}_1^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{12}}e^{+r_2}\hat{p}_2^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{6}}e^{+r_3}\hat{p}_3^{(0)} - \frac{1}{\sqrt{2}}e^{+r_4}\hat{p}_4^{(0)} \end{array} \right. \quad (5-8)$$

为简单起见，我们将上述压缩因子都设为 r 。

接下来我们需要在海森堡绘景下做变换：

Step 1 首先 Alice 将她的两个光子 A, A_1 通过一个平衡 (50%) 分束器 (beam splitter) 混合，产生了模式 + 和模式 -：

$$\begin{cases} \hat{x}_+ = (\hat{x}_A + \hat{x}_{A_1})/\sqrt{2}, \hat{p}_+ = (\hat{p}_A + \hat{p}_{A_1})/\sqrt{2} \\ \hat{x}_- = (\hat{x}_A - \hat{x}_{A_1})/\sqrt{2}, \hat{p}_- = (\hat{p}_A - \hat{p}_{A_1})/\sqrt{2} \end{cases} \quad (5-9)$$

Step 2 $\hat{x}_{A_2}, \hat{p}_{A_2}, \hat{x}_B, \hat{x}_C$ 用 \hat{x}_-, \hat{p}_+ 表示：

$$\begin{cases} \hat{x}_{A_2} = \hat{x}_A - \hat{x}_{A_1} + \hat{x}_{A_2} - \sqrt{2}\hat{x}_- \\ \hat{p}_{A_2} = \hat{p}_A + (\hat{p}_{A_1} + \hat{p}_{A_2} + \hat{p}_B + \hat{p}_C) - \hat{p}_B - \hat{p}_C - \sqrt{2}\hat{p}_+ \\ \hat{x}_B = \hat{x}_A - \hat{x}_{A_1} + \hat{x}_B - \sqrt{2}\hat{x}_- \\ \hat{x}_C = \hat{x}_A - \hat{x}_{A_1} + \hat{x}_C - \sqrt{2}\hat{x}_- \end{cases} \quad (5-10)$$

接着 Alice 测量 \hat{x}_-, \hat{p}_+ 得到测量值 x_-, p_+ 。把 x_- 的值通过经典信道发送给 Bob 和 Claire。假设测量时光电检测器 (photodetector) 的效率为 η 。

Step 3 Alice 将她的 A_2 的位置平移 $\sqrt{2}x_-$ ，动量平移 $\sqrt{2}p_+$ 。Bob 和 Claire 分别

将他们的 B, C 平移 $\sqrt{2}x_-$ 。最终得到的 A', B', C' 为：

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_{A'} = \hat{x}_A - (\hat{x}_{A_1} - \hat{x}_{A_2}) - \sqrt{2(1-\eta)/\eta}\hat{x}_1^{(0)} \\ \hat{p}_{A'} = \hat{p}_A + (\hat{p}_{A_1} + \hat{p}_{A_2} + \hat{p}_B + \hat{p}_C) - \hat{p}_B - \hat{p}_C + \sqrt{2(1-\eta)/\eta}\hat{p}_2^{(0)} \\ \hat{x}_{B'} = \hat{x}_A - (\hat{x}_{A_1} - \hat{x}_B) - \sqrt{2(1-\eta)/\eta}\hat{x}_1^{(0)} \\ \hat{p}_{B'} = \hat{p}_B \\ \hat{x}_{C'} = \hat{x}_A - (\hat{x}_{A_1} - \hat{x}_C) - \sqrt{2(1-\eta)/\eta}\hat{x}_1^{(0)} \\ \hat{p}_{C'} = \hat{p}_C \end{array} \right. \quad (5-11)$$

有上述步骤，得到的 A', B', C' 即相当于相干信道的输出，满足约束条件：

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \hat{x}_{B'} - \hat{x}_{A'} \rangle = \langle \hat{x}_B - \hat{x}_{A_2} \rangle = 0 \\ \langle (\hat{x}_{B'} - \hat{x}_{A'})^2 \rangle = \langle (\hat{x}_B - \hat{x}_{A_2})^2 \rangle = 2e^{-2r} \\ \langle \hat{x}_{C'} - \hat{x}_{A'} \rangle = \langle \hat{x}_C - \hat{x}_{A_2} \rangle = 0 \\ \langle (\hat{x}_{C'} - \hat{x}_{A'})^2 \rangle = \langle (\hat{x}_C - \hat{x}_{A_2})^2 \rangle = 2e^{-2r} \\ \langle \hat{p}_{\Delta X} + \hat{p}_{B'} + \hat{p}_{C'} \rangle = \langle \hat{p}_{A_1} + \hat{p}_{A_2} + \hat{p}_B + \hat{p}_C + \sqrt{2(1-\eta)/\eta}\hat{p}_2^{(0)} \rangle = 0 \\ \langle (\hat{p}_{\Delta X} + \hat{p}_{B'} + \hat{p}_{C'})^2 \rangle = 4e^{-2r} + 2(1-\eta)/\eta \end{array} \right. \quad (5-12)$$

因此，上述过程等价于一个 $[4e^{-2r} + 2(1-\eta)/\eta]$ -近似 PQ 相干信道。这里用最大的噪声项 x 来估计信道，称为 x -近似相干信道。

这里， n 等于 3，当 n 更大时，我们可以很容易的计算出： $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \cdots \varepsilon_{n-1}$ 保持不变 ($=2e^{-2r}$)， ε_n 等于 $(n+1)e^{-2r} + 2(1-\eta)/\eta$ ，即我们实现了一个 $[(n+1)e^{-2r} + 2(1-\eta)/\eta]$ -近似相干信道。

实现 MQ 相干信道的过程与之类似，需要制备位置和为 0 的 GHZ 纠缠态，其余对应位置和动量交换即可。

5.2.2.2 基于 EPR 纠缠对的相干信道实现

M. M. Wilde 等人基于 EPR 纠缠对实现了两方相干密集编码^[30]。参考他们的思路，我们拓展到了多方的情形。

在基于 EPR 纠缠对的实现方式中，我们提出了两种不同的实验配置，每一种配置都能同时实现一个 PQ 和一个 MQ 信道，每种配置都需要 $(n - 1)$ 个 EPR 纠缠对。

我们使用和上述类似的方式制备 EPR 纠缠对，在海森堡表象下有：

$$\begin{cases} \hat{x}_1 = (e^{+r}\hat{x}_1^{(0)} + e^{-r}\hat{x}_2^{(0)})/\sqrt{2}, & \hat{p}_1 = (e^{-r}\hat{p}_1^{(0)} + e^{+r}\hat{p}_2^{(0)})/\sqrt{2} \\ \hat{x}_2 = (e^{+r}\hat{x}_1^{(0)} - e^{-r}\hat{x}_2^{(0)})/\sqrt{2}, & \hat{p}_2 = (e^{-r}\hat{p}_1^{(0)} - e^{+r}\hat{p}_2^{(0)})/\sqrt{2} \end{cases} \quad (5-13)$$

两种配置中我们会用到两种常用基本量子操作，第一种是本地量子非破坏测量^[31](QND, quantum nondemolition)，用 \hat{Q} 表示这种操作：

$$\hat{Q}_{1,2} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{x}_{1'} = \hat{x}_1, & \hat{p}_{1'} = \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \\ \hat{x}_{2'} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2, & \hat{p}_{2'} = \hat{p}_2 \end{cases} \quad (5-14)$$

另一种是有相位调节 (phase adjust) 的 QND 测量^[31]，用 \hat{Q}^p 表示：

$$\hat{Q}_{1,2}^p \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{x}_{1'} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2, & \hat{p}_{1'} = \hat{p}_1 \\ \hat{x}_{2'} = \hat{x}_2, & \hat{p}_{2'} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2 \end{cases} \quad (5-15)$$

配置 1 在这种配置中，Alice 和 Bob 拥有一对 EPR 纠缠对：Alice 有模式 3，Bob

有模式 4。Bob 和 Claire 拥有一对 EPR 纠缠对：Bob 有模式 5，Claire 有模式 6。Alice 最初拥有模式 1,2 准备发送。整个配置如图所示。

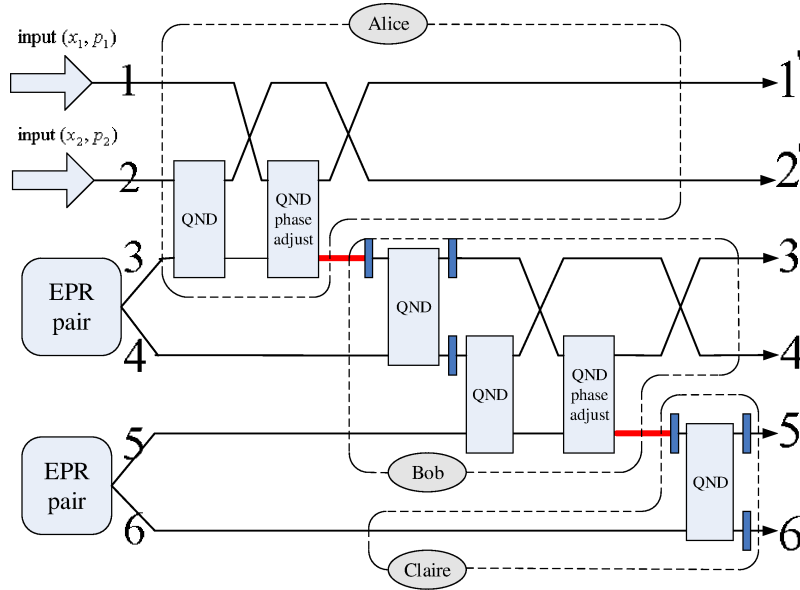


图 5-2 基于 EPR 纠缠对相干信道实现 - 配置一

按照如图所示的操作之后，获得的量子态为：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{x}_{1'} = \hat{x}_1 - (\hat{x}_2 + \hat{x}_3), & \hat{p}_{1'} = \hat{p}_1 \\ \hat{x}_{2'} = \hat{x}_2, & \hat{p}_{2'} = \hat{p}_2 - \hat{p}_3 \\ \hat{x}_{3'} = \hat{x}_2 + \hat{x}_3 - (\hat{x}_2 + \hat{x}_3 - \hat{x}_4 + \hat{x}_5) & \hat{p}_{3'} = \hat{p}_1 + \hat{p}_3 + \hat{p}_4 \\ \hat{x}_{4'} = \hat{x}_2 + \hat{x}_3 - \hat{x}_4, & \hat{p}_{4'} = -\hat{p}_4 - \hat{p}_5 \\ \hat{x}_{5'} = \hat{x}_2 + \hat{x}_3 - \hat{x}_4 + \hat{x}_5, & \hat{p}_{5'} = \hat{p}_1 + \hat{p}_3 + \hat{p}_4 + \hat{p}_5 + \hat{p}_6 \\ \hat{x}_{6'} = \hat{x}_2 + \hat{x}_3 - \hat{x}_4 + \hat{x}_5 - \hat{x}_6, & \hat{p}_{6'} = -\hat{p}_6 \end{array} \right. \quad (5-16)$$

很容易验证得知，模式 1',3',5' 等效于一个 3 方 MQ 相干信道；模式 2',4',6' 等效于一个 PQ 相干信道。

配置 2 在这种配置中，Alice 拥有模式 1,2,3,5。Bob 有模式 4。Claire 有模式 6。模式 1,2 是待传递的消息。模式 3,4 和模式 5,6 分别是两对 EPR 纠缠对。整个配置如图所示。

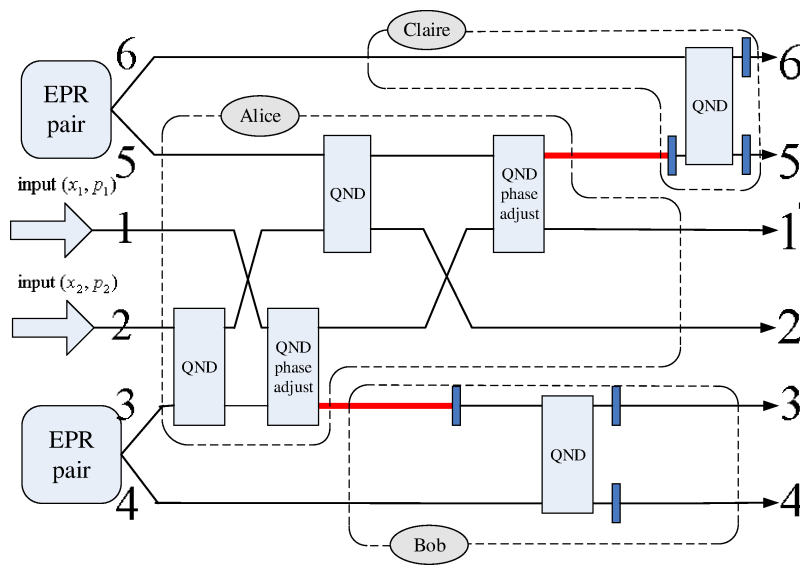


图 5-3 基于 EPR 纠缠对相干信道实现 - 配置二

按照如图所示的操作之后，获得的量子态为：

$$\left\{ \begin{array}{ll} \hat{x}_{1'} = \hat{x}_1 - (\hat{x}_2 + \hat{x}_3) - (\hat{x}_2 + \hat{x}_5), & \hat{p}_{1'} = \hat{p}_1 \\ \hat{x}_{2'} = \hat{x}_2, & \hat{p}_{2'} = \hat{p}_2 - \hat{p}_3 - \hat{p}_5 \\ \hat{x}_{3'} = \hat{x}_2 + \hat{x}_3, & \hat{p}_{3'} = \hat{p}_1 + \hat{p}_3 + \hat{p}_4 \\ \hat{x}_{4'} = \hat{x}_2 + \hat{x}_3 - \hat{x}_4, & \hat{p}_{4'} = -\hat{p}_4 \\ \hat{x}_{5'} = \hat{x}_2 + \hat{x}_5, & \hat{p}_{5'} = \hat{p}_1 + \hat{p}_5 + \hat{p}_6 \\ \hat{x}_{6'} = \hat{x}_2 + \hat{x}_5 - \hat{x}_6, & \hat{p}_{6'} = -\hat{p}_6 \end{array} \right. \quad (5-17)$$

很容易验证得知，模式 1',3',5' 等效于一个 3 方 MQ 相干信道；模式 2',4',6' 等效于一个 PQ 相干信道。

讨论两种配置下的噪声影响，假定 QND 操作都是理想的。

在配置一情况下：

$$\left\{ \begin{array}{l} PQ \text{ conat channel} : \epsilon_1 = 2e^{-2r}, \epsilon_2 = 4e^{-2r}, \epsilon_3 = 4e^{-2r} \\ MQ \text{ conat channel} : \epsilon_1 = 2e^{-2r}, \epsilon_2 = 4e^{-2r}, \epsilon_3 = 0 \end{array} \right. \quad (5-18)$$

在配置二情况下：

$$\left\{ \begin{array}{l} PQ \text{ conat channel} : \epsilon_1 = 2e^{-2r}, \epsilon_2 = 2e^{-2r}, \epsilon_3 = 4e^{-2r} \\ MQ \text{ conat channel} : \epsilon_1 = 2e^{-2r}, \epsilon_2 = 2e^{-2r}, \epsilon_3 = 0 \end{array} \right. \quad (5-19)$$

对比后可以发现配置二情况下噪声更低。

5.3 多方连续变量量子相干信道的应用

量子相干信道的提出为量子相干通信提供了支持。量子相干通信 (coherent communication) 有许多有用的特性和应用。它能够实现相干通信下的量子隐形传态 (quantum teleportation) 和量子密集编码 (quantum dense coding)。除此之外, 它还能够远程量子态制备 (RSP, remote state preparation) 上^[2], 比常规制备方法需要更少的初始纠缠态。有学者的研究表明, 相干信道在纠错码技术方面也有重要应用^[32, 33]。

我们的研究工作将连续变量的量子相干信道拓展到了多方情况下, 能够实现多方量子隐形传态和密集编码。这在对通信性能、效率要求日益增高的今天, 具有很强的现实意义, 也为使量子通信技术更加实用化做出贡献。

5.4 本章小结

本章中, 我们介绍了量子相干信道的研究现状, 包括离散变量的相干比特 (cobit) 信道和连续变量的相干奈特 (conat) 信道。之前研究者们的工作都是停留在两方相干信道。

我们的研究将其推广到了多方的情形下, 给出了多方连续相干信道的严格定义, 并且提出了 2 种多方量子相干信道的实现方法和应用: 多方隐形传态和多方密集编码。针对非理想的初始压缩态情况下, 我们对其噪声进行了分析。

第六章 全文总结

本文可以认为是对作者本科期间在上海交通大学光纤所实验室 3 年学习研究的总结，研究的内容主要涉及到了非线性光学和量子信息的一些基础内容。

在正文的开始部分，作者按照自己的理解梳理了非线性光学的波动方程描述和量子力学的描述语言。这两个领域都是独立著书立作也无法展现全貌的庞大体系，作者只能以自己管中窥豹的一知半解，为后文的论述补充知识背景，并希望能帮初学者减少一点点弯路。

本文中主要的研究内容分成了三个部分：在第一个部分中，我们基于一个通用的非线性光子晶体设计方法完成了一个可以自动化设计的程序，并用一维、二维的实例进行了验证。设计的程序已经能够实现针对任意多个失配量的匹配，并图形化的显示出晶体图和频谱图像。然而，依然存在一些有待改进之处：没有针对晶格点放置不同形状的基本图案 (motif) 进行探讨；一维的情况下占空比的选取需要手工实验；可以建立接口和晶体加工设备相连接，直接加工出符合要求的晶体来。

在第二个部分中，我们设计了两种非线性频率转换的应用。在五方纠缠源模型中，我们设计了一个级联的多参量光学过程，给出了模型的完整实验方案，并理论计算出了五方纠缠判据符合纠缠的要求。在双光子宽带纠缠源模型中，我们在啁啾空间结构的晶体上使用 Type-II 型 SPDC 过程，达到了保持原有脉冲压缩性质的基础上，易于分离的目的。在下一步的工作中，可以考虑结合非共线 SPDC 过程，产生三方宽带纠缠，使得其中两方偏振不同，第三方出射角度不同，达到同时易于分离的目的。

第三个部分的工作，主要是基于量子通信理论。我们的研究拓展相干信道

的概念到了多方情形。在研究中，我们给出了拓展后的严格定义，并给出了两种可能的光学实现配置。相干信道还是一个很新的概念，我们的工作有助于使相干概念更加明确，有助于为研究更多可能的应用提供平台理论支持。

总体而言，本文研究的工作只是为现代光通信、量子通信研究打开了一些思路。在研究这些问题的过程中，我也逐渐发现了量子领域的神秘和魅力，而研究的过程使我加深了对量子世界的理解。我想信量子理论能够带来通信和计算科技的飞跃，也会继续投入到这一领域的工作中去。

参考文献

- [1] BOYD R. Nonlinear Optics[M], Nonlinear Optics Series.[S.l.]: Elsevier Science, 2008.
- [2] HARROW A. Coherent communication of classical messages[J]. Physical review letters, 2004, 92(9):097902.
- [3] 叶佩弦. 非线性光学物理 [M], 北京大学物理学丛书. 理论物理专辑.[S.l.]: 北京大学出版社, 2007.
- [4] GIORDMAINE J A, MILLER R C. Tunable Coherent Parametric Oscillation in LiNbO_3 at Optical Frequencies[J]. Phys. Rev. Lett., 1965, 14:973–976.
- [5] PORAT G, GAYER O, ARIE A. Simultaneous parametric oscillation and signal-to-idler conversion for efficient downconversion[J]. Optics Letters, 2010, 35(9):1401–1403.
- [6] GU Y, HE G, WU X. Generation of six-partite continuous-variable entanglement using a nonlinear photonic crystal by frequency conversions[J]. Physical Review A, 2012, 85(5):052328.
- [7] 赵凯华. 新概念物理教程: 量子物理 [M].[出版地不详]: 高等教育出版社, 2008.
- [8] 量子密码通信 [M].[出版地不详]: 科学出版社, 2006.
- [9] WALLS D F, MILBURN G G J. Quantum optics[M].[S.l.]: Springer, 2007.

- [10] BAHABAD A, VOLOCH N, ARIE A, et al. Experimental confirmation of the general solution to the multiple-phase-matching problem[J]. JOSA B, 2007, 24(8):1916–1921.
- [11] OFFERHAUS H, BRODERICK N, ROSS G, et al. HeXLN, the first 2D nonlinear photonic crystal[J]. 1999.
- [12] UNAL B, FOURNÉE V, SCHNITZENBAUMER K J, et al. Nucleation and growth of Ag islands on fivefold Al-Pd-Mn quasicrystal surfaces: Dependence of island density on temperature and flux[J]. Phys. Rev. B, 2007, 75:064205.
- [13] ARIE A, BAHABAD A, HABSHOOSH N. Nonlinear Interactions in Periodic and Quasi-Periodic Nonlinear Photonic Crystals[M]// FERRARO P, GRILLI S, NATALE P. 2009. Ferroelectric Crystals for Photonic Applications.[S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, Springer Series in Materials Science, vol. 91.
- [14] LIFSHITZ R, ARIE A, BAHABAD A. Photonic quasicrystals for nonlinear optical frequency conversion[J]. Physical review letters, 2005, 95(13):133901.
- [15] NIELSEN M A, CHUANG I L. Quantum computation and quantum information[M].[S.l.]: Cambridge university press, 2010.
- [16] YAO X C, WANG T X, XU P, et al. Observation of eight-photon entanglement[J]. Nature Photonics, 2012, 6(4):225–228.
- [17] LU C Y, ZHOU X Q, GÜHNE O, et al. Experimental entanglement of six photons in graph states[J]. Nature Physics, 2007, 3(2):91–95.

- [18] YU Y, XIE Z, YU X, et al. Generation of three-mode continuous-variable entanglement by cascaded nonlinear interactions in a quasiperiodic superlattice[J]. *Physical Review A*, 2006, 74(4):042332.
- [19] LENG H, WANG J, YU Y, et al. Scheme to generate continuous-variable quadripartite entanglement by intracavity down-conversion cascaded with double sum-frequency generations[J]. *Physical Review A*, 2009, 79(3):032337.
- [20] SU X, TAN A, JIA X, et al. Experimental preparation of quadripartite cluster and Greenberger-Horne-Zeilinger entangled states for continuous variables[J]. *Physical review letters*, 2007, 98(7):070502.
- [21] GARDINER C W, et al. *Handbook of stochastic methods*[M], Vol. 3.[S.l.]: Springer Berlin, 2002.
- [22] VAN LOOCK P, FURUSAWA A. Detecting genuine multipartite continuous-variable entanglement[J]. *Phys. Rev. A*, 2003, 67:052315.
- [23] HARRIS S. Chirp and compress: toward single-cycle biphotons[J]. *Physical review letters*, 2007, 98(6):063602.
- [24] ZHAO J, SUN L, YU X, et al. Broadband continuous-variable entanglement source using a chirped poling nonlinear crystal[J]. *Physical Review A*, 2010, 81(1):013832.
- [25] TANAKA A, OKAMOTO R, LIM H H, et al. Noncollinear parametric fluorescence by chirped quasi-phase matching for monocycle temporal entanglement[J]. arXiv preprint arXiv:1210.6137, 2012.

- [26] CASTECH. 福建福晶科技 -BBO 晶体参数 [EB/OL].
http://gb.castech.com/products_detail/&productId=bb25372e-de42-4f0a-8aed-a1a2eb0debd1.html.
- [27] WILDE M M, KROVI H, BRUN T A. Coherent communication with continuous quantum variables[J]. *Physical Review A*, 2007, 75(6):060303.
- [28] GREENBERGER D, HORNE M, ZEILINGER A, et al. Quantum Theory and Conceptions of the Universe[J]. Kluwer Academic, Dordrecht. Bennett, CH, Popescu, S, Rohrlich, D, Smolin, JA, and Thapliyal, AV (2001). *Phys. Rev. A*, 1989, 63:012307.
- [29] VAN LOOCK P, BRAUNSTEIN S L. Multipartite entanglement for continuous variables: a quantum teleportation network[J]. *Physical review letters*, 2000, 84(15):3482–3485.
- [30] WILDE M M, BRUN T A, DOWLING J P, et al. Coherent communication with linear optics[J]. *Physical Review A*, 2008, 77(2):022321.
- [31] FILIP R, MAREK P, ANDERSEN U L. Measurement-induced continuous-variable quantum interactions[J]. *Physical Review A*, 2005, 71(4):042308.
- [32] BRUN T, DEVETAK I, HSIEH M H. Correcting Quantum Errors with Entanglement[J]. *Science*, 2006, 314(5798):436–439.
- [33] BRUN T, DEVETAK I, HSIEH M H. Catalytic quantum error correction[J]. arXiv preprint quant-ph/0608027, 2006.

致 谢

我在上海交通大学光纤所的量子通信实验室里度过了本科中的3年时光，指导老师是何广强副教授。刚开始时，我是一个仅有高中物理背景的电子系学生身份加入。学习的过程是很辛苦的，因为这个实验室的研究涉及到物理和通信两方面，而其中的光学、量子力学和密码学本身又是相当庞杂的分支。

我首先想感谢我的指导老师何广强副教授。他在我遇到概念和方法的困惑时，总是非常耐心地给我讲解那些晦涩的知识，推荐符合我进展的书籍和论文。每次有学生请教问题，何老师总是立刻停下手上的工作，为学生解答疑惑。而最令我感到钦佩的是，何老师对于学术和科学事业的执着热情。每当遇到有趣的问题或者是研究的新思路，何老师能够全神贯注的投入到问题的思考中，并沉醉其中。正是他这种治学的精神一直鼓励着我，让我有志于在学术道路上前行。

其次，我要感谢实验室的其他同学。他们有些是高年级学长，有些还是学弟，然而他们都有着对探究问题的兴趣和能力。我经常和他们讨论一些概念或者是方法上的疑问。在交流中，我常常有不一样的收获和体会。此外，我还要感谢南京大学物理系和交大理科班的两位同学，他们帮助我解答了在物理学方面的许多疑问。

最后，我要感谢我的父亲母亲，他们一直默默支持和鼓励着我的学习生活，让我能够顺利地完成我的求学之路。

谢谢！

DESIGN AND APPLICATION OF NONLINEAR OPTICAL CRYSTALS AND IN QUANTUM INFORMATION

To be done.