



第六章 平面电磁波

何广强

上海交大电子工程系量子非线性光子学实验室





- 1 6.1 理想媒质中的平面波
- 2 6.2 导电媒质中的平面波
- 3 6.3 平面波的极化
- 4 6.4 平面波的反射与透射
- 5 6.5 全反射和全透射
- 6 6.6 作业



1 6.1 理想媒质中的平面波

2 6.2 导电媒质中的平面波

3 6.3 平面波的极化

4 6.4 平面波的反射与透射

5 6.5 全反射和全透射

6 6.6 作业



主要内容

- 6.1 理想媒质中的电磁波
 - 平面波的电磁场
 - 平面波的传播特性
 - 沿任意方向传播的平面波
- 6.2 导电媒质中的平面波
 - 导电媒质的分类
 - 平面波在导电媒质中的传播特性
- 6.3 平面波的极化
 - 线极化 圆极化 椭圆极化



6.1 理想媒质中的平面波

上海交通大学

6.1.1 平面波的电磁场

在无界空间、线性、均匀、各向同性理想介质的无源区域中传播， \vec{E} 和 \vec{B} 满足的齐次矢量波动方程为

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

时谐电磁场

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{\nabla \rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{\nabla \rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = j\omega \mu \vec{J} + \frac{\nabla \rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{H} = -\nabla \times \vec{J}$$



6.1 理想媒质中的平面波

上海交通大学

6.1.1 平面波的电磁场

设 \vec{E} 沿 x 轴方向, 则

$$\vec{E} = a_x E_x$$

$$\nabla^2 E_x + k^2 E_x = 0$$

设 $E_x(z)$, 则

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + k^2 E_x = 0$$

则

$$E_x = E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{+jkz} = E_x^+ + E_x^-$$

$$\begin{aligned} E_x(t) &= E_0^+ \cos(\omega t - kz) + E_0^- \cos(\omega t + kz) \\ &= E_x^+(t) + E_x^-(t) \end{aligned}$$

$E_x^+(t)$: 正向行波; $E_x^-(t)$: 反向行波

$E_x = E_0 e^{-jkz}$, $E_x(t) = E_0 \cos(\omega t - kz)$ 等相位面

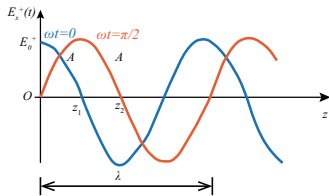


Figure 1: 沿正 z 方向传播的行波



6.1 理想媒质中的平面波

上海交通大学

6.1.1 平面波的电磁场

平面波的磁场

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -j\omega\mu(\vec{a}_x H_x + \vec{a}_y H_y + \vec{a}_z H_z)\end{aligned}$$

$$H_y = \frac{k}{\omega\mu} E_x = H_0 e^{-jkz} \quad H_0 = \frac{kE_0}{\omega\mu}$$

$$\vec{H}(t) = \vec{a}_y \operatorname{Re}(H_y e^{j\omega t}) = \vec{a}_y H_0 \cos(\omega t - kz)$$



6.1 理想媒质中的平面波

上海交通大学

6.1.2 平面波的传播特性参数与传播特性

■ 传播特性参数

时间相位变化 2π 所经历的时间称为电磁波的周期，以 T 表示，而一秒内相位变化 2π 的次数称为频率，以 f 表示。那么由 $\omega T = 2\pi$ 的关系式，得

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$

空间相位 kz 变化 2π 所经过的距离称为波长，以 λ 表示。那么由关系式 $k\lambda = 2\pi$ ，得

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

由上可见，电磁波的**频率**是描述相位随时间的变化特性，而**波长**描述相位随空间的变化特性。



6.1 理想媒质中的平面波

上海交通大学

6.1.2 平面波的传播特性参数与传播特性

由上式又可得 $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

因空间相位变化 2π 相当于一个**全波**， k 的大小又可衡量单位长度内具有的全波数目，所以 k 又称为**波数**。

根据相位不变点的轨迹变化可以计算电磁波的相位变化速度，这种相位速度以 v_p 表示。令 $\omega t - kz = \text{常数}$ ，得 $\omega dt - kdz = 0$ ，则**相位速度** v_p 为

$$v_p = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$$

相位速度又简称为**相速**。

$$\text{本征阻抗: } \eta = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad \Omega$$



6.1 理想媒质中的平面波

上海交通大学

6.1.2 平面波的传播特性参数与传播特性

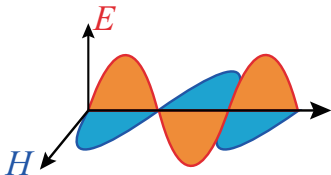


Figure 2: E_x 与 H_y 沿 x 轴的变化曲线

$$\vec{E} = \vec{a}_x E_0 e^{-jkz}$$

$$\vec{H} = \vec{a}_y H_0 e^{-jkz}$$

$$\vec{E}(z, t) = \vec{a}_x E_0 \cos(\omega t - kz)$$

$$\vec{H}(t) = \vec{a}_y H_0 \cos(\omega t - kz)$$

■ 平面波的传播特性

- 1 \vec{E}, \vec{H} 相互垂直, 并且都垂直于传播方向 (\vec{k}); TEM 波.
- 2 \vec{E} 和 \vec{H} 处处同相, 振幅之比为本征阻抗.
- 3 复坡印亭矢量

$$\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{H}^*) / 2 = \vec{a}_z E_0^2 / 2\eta = \vec{S}_{av}$$

- 4 电场和磁场的平均能量密度相等.

$$\begin{aligned} \omega_{av} &= 2(\omega_e)_{av} = 2(\omega_m)_{av} \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon E_0^2 = \frac{1}{2} \mu H_0^2 \end{aligned}$$



6.1 理想媒质中的平面波

上海交通大学

6.1.2 平面波的传播特性参数与传播特性

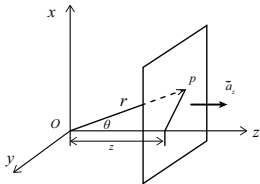


Figure 3: 沿 z 向传播的平面波

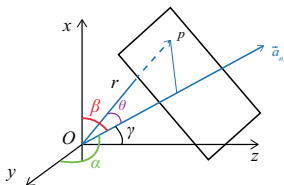


Figure 4: 沿任意方向传播的平面波

沿正 z 传播的电磁波: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-jkz}$

$P(x,y,z), \vec{r} = \vec{a}_x x + \vec{a}_y y + \vec{a}_z z$, 沿 \vec{a}_z 方向传播: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-jk\vec{a}_z \cdot \vec{r}}$;

沿 \vec{a}_n 方向传播: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-jk\vec{a}_n \cdot \vec{r}} = \vec{E}_0 e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$;

波矢量:

$$\vec{k} = k\vec{a}_n = \vec{a}_x k \cos \alpha + \vec{a}_y k \cos \beta + \vec{a}_z k \cos \gamma = \vec{a}_x k_x + \vec{a}_y k_y + \vec{a}_z k_z$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2; \vec{E} = \vec{E}_0 e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}$$



6.1 理想媒质中的平面波

上海交通大学

6.1.2 平面波的传播特性参数与传播特性

沿任意方向传播的磁场强度

$$\left. \begin{aligned} -j\vec{k} \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \\ -j\vec{k} \times \vec{H} &= j\omega\varepsilon\vec{E} \\ -j\vec{k} \cdot \vec{E} &= 0 \\ -j\vec{k} \cdot \vec{H} &= 0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{\eta}\vec{a}_n \times \vec{E} \\ \vec{E} &= -\eta\vec{a}_n \times \vec{H} \\ \vec{a}_n \cdot \vec{E} &= 0 \\ \vec{a}_n \cdot \vec{H} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

无源区域中传播的平面波的场矢量一定垂直于波的传播方向。

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta}\vec{a}_n \times \vec{E} = \frac{1}{\eta}(\vec{a}_n \times \vec{E}_0)e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega\mu}$$

平均功率流密度为：

$$\begin{aligned} \vec{S}_{av} &= \text{Re}\left[\frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^*\right] \\ &= \frac{1}{2\eta}\text{Re}\left[\vec{E} \times (\vec{a}_n \times \vec{E}^*)\right] \\ &= \vec{a}_n \frac{E_0^2}{2\eta} = \vec{a}_n S_{av} \end{aligned}$$

矢量 \vec{a}_n 的方向为功率流的传播方向。



6.1 理想媒质中的平面波

上海交通大学

例题

5-1 一均匀平面波在空气中传播，其磁场强度为

$$\vec{H} = (\sqrt{3}\vec{a}_x - \vec{a}_y + \vec{a}_z) \sin(\omega t + Ax - 2\sqrt{3}z) A/m$$

求：(1) A ; (2) f, \vec{a}_n ; (3) 复数形式 \vec{E}



6.1 理想媒质中的平面波

上海交通大学

例题

5-1 一均匀平面波在空气中传播，其磁场强度为

$$\vec{H} = (\sqrt{3}\vec{a}_x - \vec{a}_y + \vec{a}_z) \sin(\omega t + Ax - 2\sqrt{3}z) A/m$$

求：(1) A ； (2) f, \vec{a}_n ； (3) 复数形式 \vec{E}

解：(1) 因为 $\vec{H} = (\sqrt{3}\vec{a}_x - \vec{a}_y + \vec{a}_z) \sin(\omega t + Ax - 2\sqrt{3}z)$,

故 $\vec{k} = -A\vec{a}_x + 2\sqrt{3}\vec{a}_z$ 。又因为 $\vec{k} \cdot \vec{H} = 0$,

有 $(-A\vec{a}_x + 2\sqrt{3}\vec{a}_z) \cdot (\sqrt{3}\vec{a}_x - \vec{a}_y + \vec{a}_z) = 0$, 所以 $A=2$ 。



6.1 理想媒质中的平面波

上海交通大学

例题

(2) 因为 $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} = 4$, 所以

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\pi}{2}m, f = \frac{c}{\lambda} = 1.91 \times 10^8 \text{Hz}$$

又因为 $\vec{a}_n = \frac{\vec{k}}{k}$

$$\vec{a}_n = \frac{-2\vec{a}_x + 2\sqrt{3}\vec{a}_z}{4} = \frac{-\vec{a}_x}{2} + \frac{\sqrt{3}\vec{a}_z}{2}$$

(3)

$$\vec{E} = -\eta_0(\vec{a}_n \times \vec{H}) = -188.5(\sqrt{3}\vec{a}_x + 4\vec{a}_y + \vec{a}_z)e^{-j(2\sqrt{3}z - 2x + \frac{\pi}{2})}V/m$$



6.1 理想媒质中的平面波

上海交通大学

例题

例 频率为 100MHz 的正弦均匀平面波在各向同性的均匀理想介质中沿 $+z$ 方向传播, 介质的特性参数为 $\varepsilon_r = 4, \mu_r = 1, \gamma = 0$, 设电场沿 x 方向, 即 $\vec{E} = \vec{a}_x E_x$.

已知: 当 $t = 0, z = 1/8$ 时, 电场等于其振幅 10^{-4}V/m 。

试求: (1) 波的传播速度, 波长, 波数; (2) 电场和磁场的瞬时表达式; (3) 坡印亭矢量和平均坡印亭矢量。



6.1 理想媒质中的平面波

上海交通大学

例题

例 频率为 100MHz 的正弦均匀平面波在各向同性的均匀理想介质中沿 $+z$ 方向传播, 介质的特性参数为 $\epsilon_r = 4, \mu_r = 1, \gamma = 0$, 设电场沿 x 方向, 即 $\vec{E} = \vec{a}_x E_x$.

已知: 当 $t = 0, z = 1/8$ 时, 电场等于其振幅 10^{-4}V/m 。

试求: (1) 波的传播速度, 波长, 波数; (2) 电场和磁场的瞬时表达式; (3) 坡印亭矢量和平均坡印亭矢量。

解: 由已知条件可知: 频率: $f = 100\text{MHz}$ 振幅: $E_{x0} = 10^{-4}\text{V/m}$
(1)

$$v_p = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\epsilon_r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = \frac{3}{2} \times 10^8 \text{m/s}$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = 2\pi \times 10^8 \cdot \frac{2}{3} \times 10^{-8} = \frac{4}{3}\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1.5\text{m}$$



6.1 理想媒质中的平面波

上海交通大学

例题

$$(2) \vec{E} = \vec{a}_x E_0 \cos(\omega t - kz + \varphi_0)$$

由条件, 可知: $E_0 = 10^{-4}$, $\omega = 2\pi \times 10^8$, $k = \frac{4}{3}\pi$

$$\text{即 } \vec{E} = \vec{a}_x 10^{-4} \cos(2\pi \times 10^8 t - \frac{4}{3}\pi z + \varphi_0)$$

由已知条件, 可得:

$$10^{-4} = 10^{-4} \cos(-\frac{4}{3}\pi z + \varphi_0) \Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \vec{E} = \vec{a}_x 10^{-4} \cos(2\pi \times 10^8 t - \frac{4}{3}\pi z + \frac{\pi}{6})$$

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{k} \times \vec{E} \\ &= \frac{1}{60\pi} \vec{a}_z \times \vec{a}_x 10^{-4} \cos(2\pi \times 10^8 t - \frac{4}{3}\pi z + \frac{\pi}{6}) \\ &= \frac{1}{60\pi} \vec{a}_y 10^{-4} \cos(2\pi \times 10^8 t - \frac{4}{3}\pi z + \frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$



6.1 理想媒质中的平面波

上海交通大学

例题

(3)

$$\begin{aligned}\vec{S}(t) &= \vec{E}(t) \times \vec{H}(t) \\ &= \frac{1}{60\pi} \vec{a}_z 10^{-8} \cos^2(2\pi \times 10^8 t - \frac{4}{3}\pi z + \frac{\pi}{6})\end{aligned}$$

$$\vec{S}_{av}(t) = \frac{1}{T} \int_0^t \vec{S}(t) dt = \vec{a}_z \frac{10^{-8}}{120\pi} W/m^2$$

另解：

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{a}_x 10^{-4} e^{-j\frac{4\pi}{3}z + j\frac{\pi}{6}} \\ \vec{H} &= \frac{1}{60\pi} \vec{a}_y 10^{-4} e^{-j\frac{4\pi}{3}z + j\frac{\pi}{6}}\end{aligned}$$

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \vec{a}_z \frac{10^{-8}}{120\pi} W/m^2$$



6.1 理想媒质中的平面波

上海交通大学

例题

例：一 $\omega = 1.5 \times 10^9 \text{ rad/s}$ 的均匀平面波在充满理想电介质的无界空间中传播，

$$\vec{E} = (2\vec{a}_x + 6\vec{a}_y + 9\vec{a}_z)e^{-j(6x+7y-Az+\frac{\pi}{2})}$$

求：(1) A, λ, \vec{a} ; (2) ϵ_r ; (3) 电场强度和磁场强度的瞬时表达式; (4) $\vec{S}_{av}, \omega_{av}$

解：(1)

$$\vec{k} = 6\vec{a}_x + 7\vec{a}_y - A\vec{a}_z; \vec{k} \cdot \vec{E} = 0;$$

$$A = 6; k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = 11 \text{ rad/m}, \lambda = \frac{2\pi}{k} = 0.57,$$

$$\vec{a}_n = \frac{\vec{k}}{k} = \frac{1}{11}(6\vec{a}_x + 7\vec{a}_y - 6\vec{a}_z)$$

(2)

$$k = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}, \epsilon_r = \left(\frac{k}{\omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \right)^2 = \left(\frac{kc}{\omega} \right)^2 = 4.84$$



6.1 理想媒质中的平面波

上海交通大学

例题

(3)

$$\begin{aligned}\vec{E}(t) &= \text{Re}[\vec{E}e^{j\omega t}] \\ &= (2\vec{a}_x + 6\vec{a}_y + 9\vec{a}_z) \sin(1.5 \times 10^9 t - 6x - 7y + 6z) \text{V/m} \\ \eta &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = 171.36 \Omega \\ \vec{H}(t) &= \frac{1}{\eta} \vec{a}_n \times \vec{E}(t) \\ &= 5.84 \times 10^{-3} (9\vec{a}_x - 7\vec{a}_y + 2\vec{a}_z) \sin(1.5 \times 10^9 t - 6x - 7y + 6z) \text{V/m}\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\vec{S}_{av} &= \frac{|\vec{E}|^2}{2\eta} \vec{a}_n = 3.21 \times 10^{-2} (6\vec{a}_x + 7\vec{a}_y - 6\vec{a}_z) \text{W/m}^2 \\ \omega_{av} &= 2(\omega_e)_{av} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r |\vec{E}|^2 = 2.59 \times 10^{-9} \text{W/m}^2\end{aligned}$$



- 1 6.1 理想媒质中的平面波
- 2 6.2 导电媒质中的平面波
- 3 6.3 平面波的极化
- 4 6.4 平面波的反射与透射
- 5 6.5 全反射和全透射
- 6 6.6 作业



6.2 导电媒质中的平面波

上海交通大学

导电媒质又称为有耗媒质，是指 $\sigma \neq 0$ 的简单媒质。

$$\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$$

$\rho = 0$, \vec{E} 和 \vec{H} 满足的矢量赫姆霍兹方程为：

$$\nabla^2 \vec{E} = (j\omega\mu\sigma - k^2)\vec{E} = -\omega^2\mu\epsilon(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon})\vec{E} = -\omega^2\mu\epsilon_{ec}\vec{E}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = (j\omega\mu\sigma - k^2)\vec{H} = -\omega^2\mu\epsilon(1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon})\vec{H} = -\omega^2\mu\epsilon_{ec}\vec{H}$$

等效复介电常数： $\epsilon_{ec} = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega} = \epsilon_c' - j\epsilon_c''$,

等效复波数： $k_c' = \omega\sqrt{\mu\epsilon_{ec}}$

传播常数： $\gamma = jk_c'$

$$\nabla^2 \vec{E} + k_c'^2 \vec{E} = \nabla^2 \vec{E} - \gamma^2 \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} + k_c'^2 \vec{H} = \nabla^2 \vec{H} - \gamma^2 \vec{H} = 0$$



6.2 导电媒质中的平面波

上海交通大学

6.2.1 导电媒质的分类

$$\frac{\varepsilon_c''}{\varepsilon_c'} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \tan \delta_c$$

$\tan \delta_c$: 损耗角正切, 表示导电媒质中传导电流密度模值与位移电流模值之比, 也是导电媒质中位移电 \vec{J}_d 流与总电流密度 $\vec{J}_t = \vec{J}_c + \vec{J}_d$ 间夹角的正切。

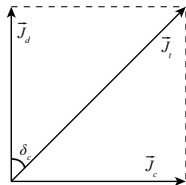


Figure 5:

良介质: $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \ll 1$; 半导体: $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \approx 1$; 良导体: $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \gg 1$.



6.2 导电媒质中的平面波

上海交通大学

6.2.2 平面波在导电媒质中的传播特性

无源区域, $E_x(z)$ 与 x, y 无关

$$\text{则 } \frac{d^2 E_x}{dz^2} - \gamma^2 E_x = 0$$

$$\text{则 } \vec{E}(z) = \vec{a}_x E_0 e^{-\gamma z}$$

$$\vec{H}(z) = \frac{1}{\eta_c} \vec{a}_z \times \vec{E} = \vec{a}_y \frac{E_0}{\eta_c} e^{-\gamma z}$$

复本征阻抗:

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_{ec}}} = \sqrt{\frac{\mu}{(\epsilon - \frac{j\sigma}{\omega})}}$$



6.2 导电媒质中的平面波

上海交通大学

$$\gamma = jk_c' = j\omega\sqrt{\mu\epsilon_{ec}} = \alpha + j\beta$$

α : 衰减常数; β : 相移常数

$$\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2 + j2\alpha\beta = -k_c'^2 = -\omega^2\mu\left(\epsilon - \frac{j\sigma}{\omega}\right)$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1\right]} = \omega\sqrt{\mu\epsilon \sec \delta_c} \sin\left(\frac{\delta_c}{2}\right)$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1\right]} = \omega\sqrt{\mu\epsilon \sec \delta_c} \cos\left(\frac{\delta_c}{2}\right)$$



6.2 导电媒质中的平面波

上海交通大学

$$\vec{E} = \vec{a}_x E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

$$\vec{E}(t) = \vec{a}_x E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

衰减单位: Np/m

$$|E_2| = |E_1| e^{-\alpha l}, \quad \alpha l = \ln \left| \frac{E_1}{E_2} \right| Np, \quad \alpha = \frac{1}{l} \ln \left| \frac{E_1}{E_2} \right| Np/m$$

$$\text{分贝 (dB): } \alpha l = 10 \lg \frac{P_1}{P_2} = 20 \lg \left| \frac{E_1}{E_2} \right| dB$$

$$\alpha = \frac{20}{l} \lg \left| \frac{E_1}{E_2} \right| dB/m$$



6.2 导电媒质中的平面波

上海交通大学

导电媒质中电磁波的波长： $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$

$$\beta = \text{Im}[\gamma], \quad \beta \neq \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

导电媒质中电磁波的相速：

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1}} < \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

色散现象，色散媒质

复本征阻抗：

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon - \frac{j\sigma}{\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2\right]^{-\frac{1}{4}} e^{j\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)} = |\eta_c| e^{j\xi}$$



6.2 导电媒质中的平面波

上海交通大学

磁场强度复矢量：

$$\vec{H} = \vec{a}_y \frac{E_0}{\eta_c} e^{-\gamma z} = \vec{a}_y \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{-j\xi}$$

瞬时表达式：

$$\vec{H}(t) = \vec{a}_y \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \xi)$$

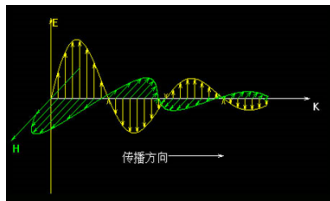


Figure 6:

TEM 模,

$$\text{复坡印亭矢量: } \vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \vec{a}_z \frac{E_0^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z} e^{j\xi}$$

$$\text{平均坡印亭矢量: } \vec{S}_{av} = \text{Re}[\vec{S}] = \vec{a}_z \frac{E_0^2}{2|\eta_c|} e^{-2\alpha z} \cos \xi$$



6.2 导电媒质中的平面波

上海交通大学

1) 良介质中的平面波

良介质是一种低损耗的媒质, $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \ll 1$.

衰减常数:

$$\alpha \approx \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

相位常数:

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu\epsilon}$$

本征阻抗:

$$\eta_c \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + \frac{\sigma}{j2\omega\epsilon}\right) \approx \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

相速度:

$$v_p \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

平面波除振幅微弱衰减外, 传播特性与理想媒质几乎完全相同。



6.2 导电媒质中的平面波

上海交通大学

2) 良导体中的平面波

良导体: $\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \gg 1$.

$$\epsilon_{ec} \approx \frac{\sigma}{j\omega}$$

衰减常数:

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\epsilon_{ec}} \approx j\omega\sqrt{\frac{\mu\sigma}{j\omega}} = \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{\omega\mu\sigma}e^{j\frac{\pi}{4}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

$$\beta \approx \alpha \approx \sqrt{\pi f\mu\sigma}$$

$$\text{本征阻抗: } \eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon_{ec}}} \approx \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}}e^{j\frac{\pi}{4}} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} = (1+j)\frac{\alpha}{\sigma}$$

$$\text{相速度: } v_p = \frac{\omega}{\beta} \approx \sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$$

6.2 导电媒质中的平面波

趋肤效应



趋肤深度：电磁波强度的幅值衰减至导体表面处的 $1/e$ 的深度。

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

$$\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{\lambda}{2\pi}$$



6.2 导电媒质中的平面波

上海交通大学

功率流密度矢量

良导体平面波的电磁场强度的复矢量为

$$\vec{E} = \vec{a}_x E_0 e^{-\gamma z} = \vec{a}_x E_0 e^{-(1+j)\alpha z} = \vec{a}_x E_x$$

$$\vec{H} = \vec{a}_y \frac{E_x}{\eta_c} = \vec{a}_y \frac{E_0}{\eta_c} e^{-(1+j)\alpha z} = \vec{a}_y \frac{E_0}{|\eta_c|} e^{-(1+j)\alpha z} e^{-j\frac{\pi}{4}} = \vec{a}_y H_y$$

复功率流密度矢量

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \vec{a}_z \frac{E_0^2}{2} e^{-2\alpha z} \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}} (1+j)$$

平均功率流密度矢量

$$\vec{S}_{av} = \text{Re}[\vec{S}] = \vec{a}_z \frac{E_0^2}{2} e^{-2\alpha z} \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}}$$



6.2 导电媒质中的平面波

上海交通大学

例题

一工作频率为 3GHz, 沿 y 方向极化的均匀平面波在有耗媒质 ($\mu = \mu_0$, $\varepsilon = 2.5\varepsilon_0$, $\tan \delta_c = 10^{-8}$) 中沿 $+x$ 方向传播 (1) 求波的振幅衰减一半时波的传播距离 (2) 设在 $x = 0$ 处 $E = \vec{a}_y 50 \sin(6 \times 10^9 \pi t + \frac{\pi}{3})$, 写出此波在任何 x 及 t 值时的磁场强度的瞬时表达式。

解: (1) 因为 $\tan \delta_c = 10^{-8} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}$,

所以 $\sigma = 10^{-2} \times 2\pi \times 3 \times 10^9 \times 2.5 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9} \approx 4.17 \times 10^3 \text{ S/m}$ 因为 $\frac{\sigma}{\omega \varepsilon} \ll 1$, 故衰减常数 α 为:

$$\alpha = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \approx 0.497 \text{ Np/m}$$

又由题意得 $e^{-\alpha x} = 1/2$

因此 $x = \frac{1}{2} \ln 2 = 1.39 \text{ m}$



6.2 导电媒质中的平面波

上海交通大学

例题

(2) 因为

$$\beta \approx \omega \sqrt{\mu \epsilon} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right] \approx 99.34 \text{ rad/m}$$

则 $\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \approx 0.063 \text{ m}$

$$\eta_c = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega \epsilon} \right) = 238.4 \left(1 + j \frac{1}{200} \right) \Omega$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \approx \left[1 - \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2 \right] \approx 1.90 \times 10^8 \text{ m/s}$$



6.2 导电媒质中的平面波

上海交通大学

例题

(3) 因为 $\vec{E} = \vec{a}_y 50e^{-\alpha x} \cos(6 \times 10^{-9}\pi t - \beta x + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2})$,

所以

$$\dot{E} = 50e^{-\alpha x} e^{-j(\beta x + \frac{\pi}{6})}$$

又因为

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \frac{1}{\dot{\eta}_c} (\vec{a}_x \times \dot{E}) = \vec{a}_x \frac{50}{|\dot{\eta}|_c} e^{-\alpha x} e^{-j(\beta x + \frac{\pi}{6} + \arctan \frac{1}{200})} \\ &= \vec{a}_x 0.21 e^{-j0.497x} e^{-j(\beta x + \frac{\pi}{6})} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \Re[\dot{H} e^{j\omega t}] \\ &= \vec{a}_x 0.21 e^{-j0.497x} \cos(6 \times 10^9 \pi t - 99.34x - \frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$



1 6.1 理想媒质中的平面波

2 6.2 导电媒质中的平面波

3 6.3 平面波的极化

4 6.4 平面波的反射与透射

5 6.5 全反射和全透射

6 6.6 作业



6.3 平面波的极化

上海交通大学

平面波的极化：媒质中某点处电场强度矢量的尾端随时间的变化方式。

线极化，圆极化，椭圆极化

假设平面波沿正 z 方向传播， \vec{E} 可分解为 \vec{E}_x 和 \vec{E}_y 两个分量，

复矢量：

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{a}_x E_x + \vec{a}_y E_y \\ \vec{E} &= \vec{a}_x E_{x0} e^{-jkz} + \vec{a}_y E_{y0} e^{-jkz} e^{-j\varphi}\end{aligned}$$

瞬时表达式为：

$$\vec{E}(z, t) = \vec{a}_x E_{x0} \cos(\omega t - kz) + \vec{a}_y E_{y0} \cos(\omega t - kz - \varphi)$$

6.3 平面波的极化

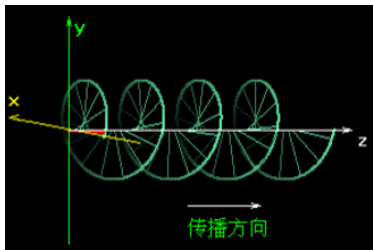


Figure 7: 右旋极化波

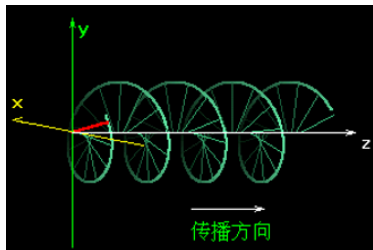


Figure 8: 左旋极化波



6.3 平面波的极化

上海交通大学

瞬时表达式的两个分量：

$$\begin{aligned}
 E_x(z, t) &= E_{x0} \cos(\omega t - kz) \\
 E_y(z, t) &= E_{y0} \cos(\omega t - kz - \varphi) \\
 \left[\frac{E_x(z, t)}{E_{x0}}\right]^2 + \left[\frac{E_y(z, t)}{E_{y0}}\right]^2 - \frac{2E_x(z, t)E_y(z, t)}{E_{x0}E_{y0}} \cos \varphi &= \sin^2 \varphi
 \end{aligned}$$

(1) 线极化

$\varphi=0$ 或 π 时，

$$E_y(z, t) = \pm \left(\frac{E_{y0}}{E_{x0}}\right) E_x(z, t)$$

$$\alpha = \arctan \frac{E_y(z, t)}{E_x(z, t)} = \pm \arctan \left(\frac{E_{y0}}{E_{x0}}\right)$$

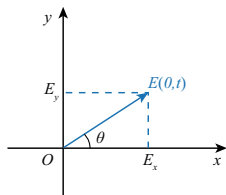


Figure 9: 线极化



6.3 平面波的极化

上海交通大学

(2) 圆极化

$$E_{xo} = E_{yo} = E_0, \varphi = \pm\pi/2, E_x^2(z, t) + E_y^2(z, t) = E_0^2$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan \frac{E_o \cos(\omega t - kz \mp \frac{\pi}{2})}{E_o \cos(\omega t - kz)} = \arctan[\pm \tan(\omega t - kz)] \\ &= \pm(\omega t - kz) \end{aligned}$$

方向判断：右手四指同大拇指垂直，右手四指从相位超前的电场分量旋转至相位滞后的分量，若波的传播方向为右手大拇指的方向，为右旋圆极化，否则，为左旋圆极化。



6.3 平面波的极化

上海交通大学

(2) 圆极化

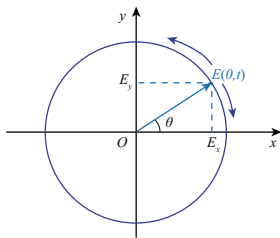


Figure 10: 圆极化

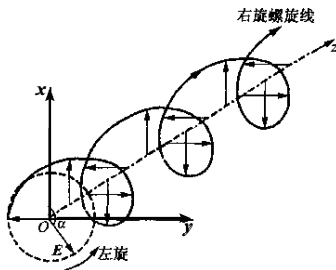


Figure 11: 左旋圆极化波电场的右旋螺旋线



6.3 平面波的极化

上海交通大学

(3) 椭圆极化

$$\varphi \neq 0, \pm\pi$$

$\varphi = \pm\frac{\pi}{2}, E_{x0} \neq E_{y0}$ 时, 为椭圆极化。

$$\tan \alpha = \frac{E_{y0} \cos(\omega t - kz - \varphi)}{E_{x0} \cos(\omega t - kz)} = \frac{E_{y0}}{E_{x0}} [\cos \varphi + \tan(\omega t - kz) \sin \varphi]$$

$$\tan 2\theta = \frac{2E_{x0}E_{y0}}{E_{x0}^2 - E_{y0}^2} \cos \varphi$$

两个空间上正交的线极化波可合成为一个椭圆极化波;
 一个椭圆极化波可分解为两个空间上正交的线极化波。
 两个旋向相反的圆极化波可合成为一个椭圆极化波;
 一个椭圆极化波可分解为两个旋向相反的圆极化波。



6.3 平面波的极化

例题

$$(1) \vec{E}(t) = \vec{a}_x 10 \cos(10^8 \pi t - y) - \vec{a}_z 5 \sin(10^8 \pi t - y)$$

$\vec{E} = \vec{a}_x 10 e^{-jy} - \vec{a}_z 5 e^{-j(y + \pi/2)}$ 沿 y 传输的右旋椭圆偏振光

$$(2) \vec{E}(t) = \vec{a}_y 3 \cos(\omega t - \beta x - 30^\circ) - \vec{a}_z 4 \cos(\omega t - \beta x + 60^\circ)$$

$\beta > 0$ 时, 沿 x 方向传输的右旋椭圆偏振光。

$\beta < 0$ 时, 沿 $-x$ 方向传输的左旋椭圆偏振光。

$$(3) \vec{E} = \vec{a}_x 2 e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j100z} - \vec{a}_y 3 e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-j100z}$$

沿 z 传输的左旋椭圆偏振光



6.3 平面波的极化

上海交通大学

例题

$$(4) \vec{E} = E_0(6j\vec{a}_x - 2\sqrt{15}\vec{a}_y + 4j\vec{a}_z)e^{-jk(2x-3z)}$$

(4) 因电磁场强度复矢量可写为

$$\dot{E} = E_0(2\sqrt{13}j\vec{a}_{xx} - 2\sqrt{15}\vec{a}_y)e^{-j\vec{k}\cdot\vec{a}}$$

式中, 因为

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} = \sqrt{(2k)^2 + (3k)^2} = \sqrt{13}k$$

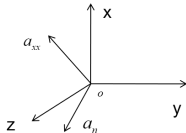


Figure 12: 例 4 图

故 $\vec{a}_n = \vec{k}/k = \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{a}_x - \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{a}_z$, 而 $\vec{a}_{xx} = \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{a}_x + \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{a}_z$ 。

于是, 在垂直于 \vec{a}_n 的平面内 E 将分解为 \vec{a}_{xx} 和 \vec{a}_y 两个方面上的分量, 如图所示。又因 \vec{a}_{xx} 方向上的分量超前 $-\vec{a}_y$ 方向上的分量 90° 。且 $E_{xx0} \neq E_{y0}$, 故此电磁场代表的波是一个右旋椭圆极化波, 波沿 \vec{a}_n 的方向传播。

说明: 也可将式中负号提出, 即将 \dot{E} 的表示式变为

$$\dot{E} = -(2\sqrt{15}E_0\vec{a}_y - j2\sqrt{13}E_0\vec{a}_{xx})e^{-j\vec{k}\cdot\vec{a}}$$

用括号的两部分进行判断, 此时 \vec{a}_y 方向上的分量超前于 \vec{a}_{xx} 方向 90° , 从而同样可判断此波是右旋椭圆极化波



6.3 平面波的极化

例题

$$(1) \vec{E} = E_0(j\vec{a}_x - 3j\vec{a}_y)e^{jkz}$$

$k > 0$ 沿-z 传输的线极化波

$$(2) = E_0(\vec{a}_x + 2j\vec{a}_z)e^{-jky}$$

$k > 0$ 沿 y 传输的右旋椭圆极化波

$$(3) \vec{E}(t) = \vec{a}_x E_0 \sin(\omega t - kz) + \vec{a}_y E_0 \cos(\omega t - kz)$$

$k > 0$ 沿 z 传输的左旋圆极化波

$$(4) \vec{E}(t) = \vec{a}_x E_0 \sin(\omega t + kz + \frac{\pi}{4}) + \vec{a}_y E_0 \cos(\omega t + kz - \frac{\pi}{4})$$

$k > 0$ 沿-z 传输的线极化波

6.3 平面波的极化



判断平面波极化方式的步骤

- (1) 确定传播方向;
- (2) 判断振幅是否相等;
- (3) 判断相位超前或滞后多少?
- (4) 判断旋转方向。



6.3 平面波的极化

推导椭圆极化方程

已知 $E_y = E_{ym} \cos(\omega t), E_z = E_{zm} \cos(\omega t + \phi)$

则 $\cos(\omega t) = \frac{E_y}{E_{ym}}$

$$\sin \omega t = \frac{\cos \omega t \cos \phi - E_z / E_{zm}}{\sin \phi} = \frac{(E_y / E_{ym}) \cos \phi - E_z / E_{zm}}{\sin \phi}$$

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$$

$$= \left(\frac{E_y}{E_{ym}}\right)^2 + \frac{(E_y / E_{ym})^2 \cos^2 \omega t + (E_z / E_{zm})^2 - (2E_y E_z / E_{ym} E_{zm}) \cos \phi}{\sin^2 \phi}$$

整理后 $\frac{E_y^2}{E_{ym}^2} + \frac{E_z^2}{E_{zm}^2} - \frac{2E_y E_z}{E_{ym} E_{zm}} \cos \phi = \sin^2 \phi$



1 6.1 理想媒质中的平面波

2 6.2 导电媒质中的平面波

3 6.3 平面波的极化

4 6.4 平面波的反射与透射

5 6.5 全反射和全透射

6 6.6 作业



6.4 平面波的反射与透射

上海交通大学

平面波以任意角度 θ_i 入射到两种媒质的平面分界面 \rightarrow 斜入射

两种媒质具有不同的电参数 (μ_1, ϵ_1) (μ_2, ϵ_2)

平面分界面处媒质的不连续性使入射波中的一部分反射，另一部分透射。

平面分界面 $z = 0$

定义入射面

分界面的法向单位矢量 \vec{a}_n 与入射波传播方向的波矢量所构成的平面。



6.4 平面波的反射与透射

上海交通大学

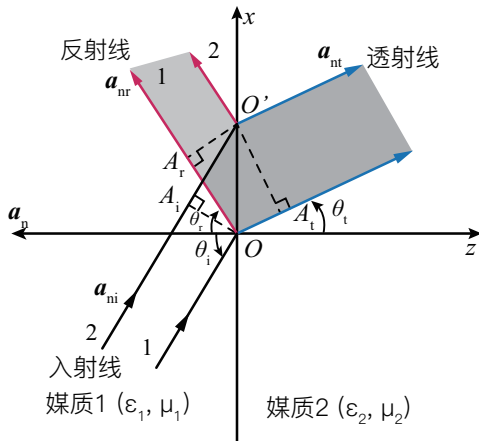


Figure 13: 平面分界面上的斜入射



6.4 平面波的反射与透射

上海交通大学

如图所示，入射线 2 在入射到分界面之前比入射线 1 多行进了 $A_i O'$ 距离，而当射线 2 被分界面反射时射线 1 则多行进了 OA_r 的距离，而 OA_i 和 OA_r 分别是入射波和反射波的等相位面，因此射线 2 经过距离 $O'A_i$ 所花的时间应等于射线 1 经过距离 OA_r 所花的时间。

又因入射线和反射线都处于媒质 1 中，故它们的相速相即 $v_{p1} = v_{p2}$ 。
于是

$$\frac{O'A_i}{v_{p1}} = \frac{OA_r}{v_{p1}}$$



6.4 平面波的反射与透射

上海交通大学

由图中的几何关系知, $OO' \sin \theta_i = OO' \sin \theta_r$, 因此

$$\theta_r = \theta_i$$

这就是**斯耐尔 (Snell) 反射定律**。

对入射线和透射线的情况。由图可知, 入射线 2 经过距离 $O'A_i$ 所花的时间与透射线 1 经过距离 OA_t 所花的时间应相等, 即

$$\frac{O'A_i}{v_{p1}} = \frac{OA_t}{v_{p2}}$$

于是, 有

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{v_{p1}}{v_{p2}} = \frac{n_2}{n_1} = \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\mu_1 \varepsilon_1}}$$



6.4 平面波的反射与透射

上海交通大学

式中, $n_i (i = 1, 2)$ 为媒质的折射率。对大多数媒质 (即非磁性媒质), $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, 上式变为

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sqrt{\frac{\epsilon_{r2}}{\epsilon_{r1}}}$$

这就是我们的熟知的斯耐尔折射定律。

因沿任意方向传输的平面波在单位面积上传输的平均功率为 $|E_0|^2/2\eta$ (因沿波的传输方向 \vec{a}_n 的平均能流密度矢量 $\vec{S}_{av} = \vec{a}_n |E_0|^2/2\eta$), 故入射波、反射波和透射波携带的能量投射到分界面面积 s 上的平均入射功率 P_i , 反射功率 P_r 和透射功率 P_t 分别为



6.4 平面波的反射与透射

上海交通大学

$$P_i = |(\vec{S}_i)_{av}|s_i = \frac{1}{2\eta}|E_{i0}|^2 s \cos \theta_i$$

$$P_r = |(\vec{S}_r)_{av}|s_r = \frac{1}{2\eta_1}|E_{r0}|^2 s \cos \theta_r$$

$$P_t = |(\vec{S}_t)_{av}|s_t = \frac{1}{2\eta}|E_{t0}|^2 s \cos \theta_t$$

式中 $s_i = s \cos \theta_i$, $s_r = s \cos \theta_r$, $s_t = s \cos \theta_t$, 分别为入射波、反射波和透射波对应的截面积。

而 E_{i0} , E_{r0} 以及 E_{t0} 分别为入射波、反射波及透射波的电场强度的复振幅。

6.4 平面波的反射与透射

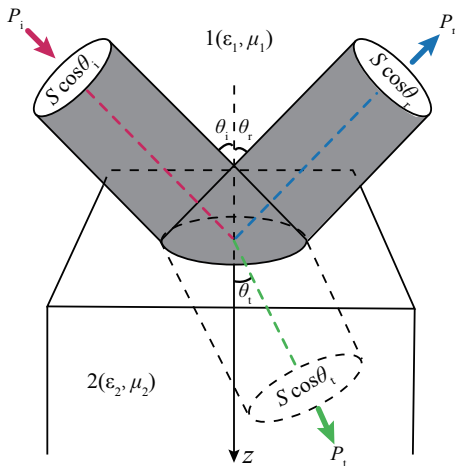


Figure 14: 入射波、反射波和透射波在分界面上的投影



6.4 平面波的反射与透射

上海交通大学

根据能量守恒定律，且不计分界面处入射波投射到分界面瞬间出现的瞬时电荷积聚效应（即只考虑稳态情况）。于是，有 $P_i = P_r + P_t$ 。所以，入射波、反射波和透射波电场强度的幅度间的关系为

$$\frac{|E_{r0}|^2}{|E_{i0}|^2} = 1 - \frac{\eta_1 |E_{t0}|^2 \cos \theta_t}{\eta_2 |E_{i0}|^2 \cos \theta_i}$$

为了便于求解与任意方向极化的入射波的场对应的反射波和透射波的场，将入射波的电场强度分解成垂直于和平行于入射面的两个分量，并称垂直于入射面为垂直极化；平行于入射面为平行极化。这样，可分别求解垂直极化和平行极化情况下反射波和透射波的场量，然后将两者所得的场量进行叠加，即得与任意方向极化的入射波电场强度对应的总的反射波和透射波的场。下面分别对垂直极化和平行极化进行讨论。



6.4.1 垂直极化

上海交通大学

对垂直极化

$$\vec{E}_i = \vec{a}_y E_{i0} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}$$

$$\vec{a}_{ni} = \vec{a}_x \sin \theta_i + \vec{a}_z \cos \theta_i$$

$$\vec{r} = \vec{a}_x x + \vec{a}_y y + \vec{a}_z z$$

入射波的复场

$$\vec{E}_i = \vec{a}_y E_{i0} e^{-j\beta_1 \vec{a}_{ni} \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{H}_i = \frac{1}{\eta_1} [\vec{a}_{ni} \times \vec{E}_i(x, z)] = \frac{E_{i0}}{\eta_1} (-\vec{a}_x \cos \theta_i + \vec{a}_z \sin \theta_i) e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}$$



6.4.1 垂直极化

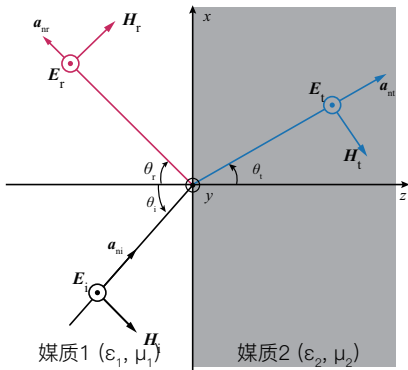
上海交通大学

$$\vec{a}_y E_{r0} e^{-j\beta_1 \vec{a}_{nr} \cdot \vec{r}}$$

$$\frac{E_{r0}}{\eta_1} (\vec{a}_x \sin \theta_r + \vec{a}_z \cos \theta_r) e^{-j\beta_1 \vec{a}_{nr} \cdot \vec{r}}$$

$$\vec{a}_y E_{i0} e^{-j\beta_1 \vec{a}_{ni} \cdot \vec{r}}$$

$$\frac{E_{i0}}{\eta_1} (-\vec{a}_x \cos \theta_i + \vec{a}_z \sin \theta_i) e^{-j\beta_1 \vec{a}_{ni} \cdot \vec{r}}$$



$$\vec{E}_t = \vec{a}_y E_{t0} e^{-j\beta_2 \vec{a}_{nt} \cdot \vec{r}}$$

$$\frac{E_{t0}}{\eta_1} (-\vec{a}_x \cos \theta_t + \vec{a}_z \sin \theta_t) e^{-j\beta_2 \vec{a}_{nt} \cdot \vec{r}}$$

Figure 15: 垂直极化



6.4.1 垂直极化

上海交通大学

反射波

$$\vec{E}_r = \vec{a}_y E_{r0} e^{-j\beta_1 \vec{a}_{nr} \cdot \vec{r}} = \vec{a}_y E_{r0} e^{-j\beta_1 (x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)}$$

$$\vec{H}_r = \frac{E_{r0}}{\eta_1} (\vec{a}_x \cos \theta_r + \vec{a}_z \sin \theta_r) e^{-j\beta_1 (x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)}$$

$$\vec{a}_{nr} = \vec{a}_x \sin \theta_r - \vec{a}_z \cos \theta_r$$

透射波

$$\vec{E}_t = \vec{a}_y E_{t0} e^{-j\beta_2 (x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)}$$

$$\vec{H}_t = \frac{E_{t0}}{\eta_2} (-\vec{a}_x \cos \theta_t + \vec{a}_z \sin \theta_t) e^{-j\beta_2 (x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)}$$

$$\vec{a}_{nt} = \vec{a}_x \sin \theta_t + \vec{a}_z \cos \theta_t$$



6.4.1 垂直极化

上海交通大学

媒质分界面 ($z = 0$) 处电场强度和磁场强度的切向分量满足以下的边界条件:

$$\left. \begin{aligned} (E_{iy} + E_{ry})|_{z=0} &= E_{ty}|_{z=0} \\ (H_{ix} + H_{rx})|_{z=0} &= H_{tx}|_{z=0} \end{aligned} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\left. \begin{aligned} E_{i0}e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} + E_{r0}e^{-j\beta_1 x \sin \theta_r} &= E_{t0}e^{-j\beta_2 x \sin \theta_t} \\ \frac{1}{\eta_1} (-E_{i0} \cos \theta_i e^{-j\beta_1 x \sin \theta_i} + E_{r0} \cos \theta_r e^{-j\beta_1 x \sin \theta_r}) \\ &= -\frac{E_{t0}}{\eta_2} \cos \theta_t e^{-j\beta_2 x \sin \theta_t} \end{aligned} \right\}$$



边界条件

6.4.1 垂直极化

相位匹配条件

$$\beta_1 \sin \theta_i = \beta_1 \sin \theta_r = \beta_2 \sin \theta_t$$

$$\theta_i = \theta_r$$

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{\sqrt{\mu_2 \epsilon_2}}{\sqrt{\mu_1 \epsilon_1}}$$

幅度匹配条件

$$\left. \begin{aligned} E_{i0} + E_{r0} &= E_{t0} \\ \frac{1}{\eta_1} (E_{i0} - E_{r0}) \cos \theta_i &= \frac{1}{\eta_2} E_{t0} \cos \theta_t \end{aligned} \right\}$$



6.4.1 垂直极化

上海交通大学

反射系数:

媒质分界面处反射波的电场强度的复振幅与入射波电场强度的复振幅之比

透射系数 (或传输系数) :

媒质分界面处透射波的电场强度的复振幅与入射波电场强度的复振幅之比

垂直极化的反射系数

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$

垂直极化的透射系数

$$T_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t}$$



6.4.1 垂直极化

上海交通大学

Γ_{\perp} 和 T_{\perp} 间满足以下关系

$$1 + \Gamma_{\perp} = T_{\perp}$$

$$1 - \Gamma_{\perp} = \frac{\eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i} T_{\perp}$$

对非磁性媒质

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} \cos \theta_t}{\cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} \cos \theta_t} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}$$

$$T_{\perp} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1} \cos \theta_t} = \frac{2 \cos \theta_i}{\cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}$$



6.4.1 垂直极化

例题

一平面波从空气中入射到 $z = 0$ 处的空气 (媒质 1) 与土壤 (媒质 2) 的交界面上, 入射波的电场强度

$$\vec{E}_i = \vec{a}_y 100 \cos(\omega t - \pi x - 1.73\pi z) \quad \text{V/m}$$

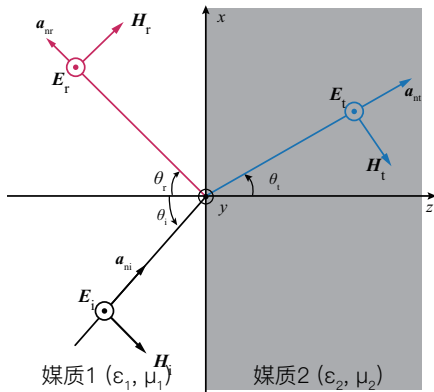
土壤视为相对介电常数

$\epsilon_{r2} = 4$ 的无耗介质。求:

(1) 空气和土壤中电磁波的波长、相移常数 β_1 , β_2 , 以及入射角 θ_i , 透射角 θ_t ;

(2) 空气和土壤中电场强度的瞬时表达式;

(3) 土壤中透射波的平均功率密度的模值。

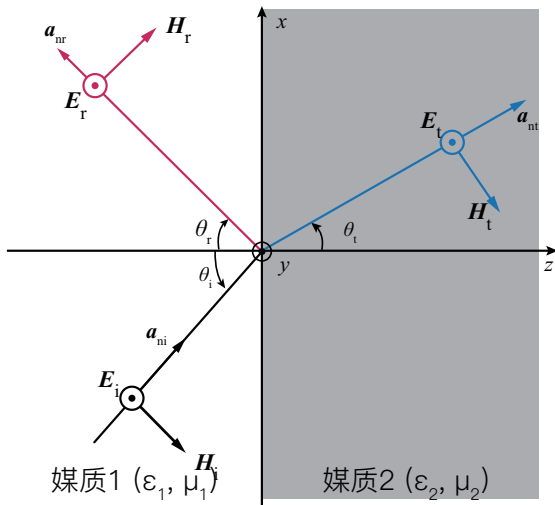




6.4.1 垂直极化

上海交通大学

例题





6.4.1 垂直极化

上海交通大学

例题

解：(1) 入射波电场强度的复数表达式为

$$\vec{E}_i = \vec{a}_y 100 e^{-j\vec{\beta}_1 \cdot \vec{r}} = \vec{a}_y 100 e^{-j(\pi x + 1.73\pi z)}$$

空气中的相移常数和波长分别为

$$\vec{\beta}_1 = \beta_1 \sin \theta_i \vec{a}_x + \beta_1 \cos \theta_i \vec{a}_z = \pi \vec{a}_x + 1.73\pi \vec{a}_z$$

$$\beta_1 = \sqrt{\pi^2 + (1.73\pi)^2} = 2\pi \quad \text{rad/m}$$

$$\lambda_1 = \lambda_0 = 2\pi/\beta_1 = 1 \quad \text{m}$$



6.4.1 垂直极化

例题

土壤中的相移常数和波长分别为

$$\beta_2 = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\varepsilon_{r2}} = \beta_1\sqrt{\varepsilon_{r2}} = 4\pi \text{ [rad/m]}$$

$$\lambda_2 = 2\pi/\beta_2 = \lambda_0/\sqrt{\varepsilon_{r2}} = 0.5\text{m}$$

由 $\vec{\beta}_1$ 的表达式, 可得入射角 θ_i 为

$$\theta_i = \arctan(\pi/1.73\pi) = 30^\circ$$

透射角为

$$\theta_t = \arcsin\left(\frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \theta_i\right) = \arcsin 0.25 = 14.5^\circ$$



6.4.1 垂直极化

上海交通大学

例题

(2) 垂直极化波的反射系数和透射系数分别为

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1 - \sin^2 \theta_i}} = -0.38$$

$$T_{\perp} = 1 + \Gamma_{\perp} = 0.62$$



6.4.1 垂直极化

例题

入射波电场强度的复振幅 $E_{i0} = 100e^{j0^\circ}$ V/m, 媒质 1 中合成波的电场强度的复数表达式

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_{1i} + \vec{E}_{1r} = \\ &\vec{a}_y E_{i0} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)} + \vec{a}_y \Gamma_{\perp} E_{i0} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i - z \cos \theta_i)} \\ &= \vec{a}_y 100 e^{-j(\pi x + 1.73\pi z)} - \vec{a}_y 38 e^{-j(\pi x - 1.73\pi z)}\end{aligned}$$

媒质 1 中合成波的电场强度的瞬时表达式为

$$\begin{aligned}\vec{E}_1(t) &= \text{Re} \left[\vec{E}_1 e^{j\omega t} \right] \\ &= \vec{a}_y [100 \cos(\omega t - \pi x - 1.73\pi z) - 38 \cos(\omega t - \pi x + 1.73\pi z)]\end{aligned}$$



6.4.1 垂直极化

上海交通大学

例题

媒质 2 中波的电场强度的复数形式为

$$\vec{E}_2 = \vec{a}_y T_{\perp} E_{i0} e^{-j\vec{\beta}_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)} = \vec{a}_y 62 e^{-j(\pi x + 3.87\pi z)}$$

其瞬时表达式为

$$\vec{E}_2(t) = \vec{a}_y 62 \cos(\omega t - \pi x - 3.87\pi z) \quad \text{V/m}$$

(3) 因在媒质 2 中, $\eta_2 = \eta_0 / \sqrt{\epsilon_{r2}} = 60\pi\Omega$, 透射波的平均功率密度的模值为

$$(S_t)_{av} = |(\vec{S}_t)_{av}| = \left| \vec{a}_{nt} \frac{|E_{t0}|^2}{2\eta_2} \right| = \frac{|E_{t0}|^2}{2\eta_2} = \frac{62^2}{2 \times 60\pi} = 10.2 \quad \text{W/m}^2$$



6.4.2 平行极化

上海交通大学

平行极化: 入射电场 \vec{E}_i 处于入射面内
媒质 1 中入射波、反射波和媒质 2 中透射波的场量可分别表示为

$$\vec{E}_i = (\vec{a}_x \cos \theta_i - \vec{a}_z \sin \theta_i) E_{i0} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}$$

$$\vec{H}_i = \vec{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_i + z \cos \theta_i)}$$

$$\vec{E}_r = \Gamma_{//} E_{i0} (\vec{a}_x \cos \theta_r + \vec{a}_z \sin \theta_r) e^{-j\beta_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)}$$

$$\vec{H}_r = -\vec{a}_y \frac{\Gamma_{//} E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1(x \sin \theta_r - z \cos \theta_r)}$$

$$\vec{E}_t = T_{//} E_{i0} (\vec{a}_x \cos \theta_t - \vec{a}_z \sin \theta_t) e^{-j\beta_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)}$$

$$\vec{H}_t = \vec{a}_y \frac{T_{//} E_{i0}}{\eta_2} e^{-j\beta_2(x \sin \theta_t + z \cos \theta_t)}$$

$\Gamma_{//}$ 和 $T_{//}$ 分别是平行极化时的反射系数和透射系数。



6.4.2 平行极化

上海交通大学

界平面处切向电场和磁场连续

$$1 + \Gamma_{//} = T_{//} \frac{\cos \theta_t}{\cos \theta_i}$$

$$1 - \Gamma_{//} = T_{//} \frac{\eta_1}{\eta_2}$$

$$\Gamma_{//} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$$

$$T_{//} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i}$$



6.4.2 平行极化

上海交通大学

平面波从空气中入射到三种
不同电介质表面

干土 $\epsilon = 3\epsilon_0, \mu = \mu_0$

潮土 $\epsilon = 25\epsilon_0, \mu = \mu_0$

水 $\epsilon = 80\epsilon_0, \mu = \mu_0$

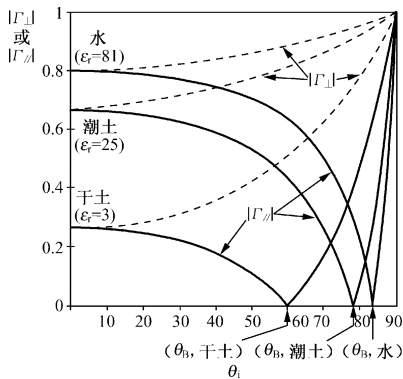


Figure 18: 三种情况下的变化曲线



6.4.2 平行极化

上海交通大学

将垂直极化和平行极化两种情况下媒质 1 中的入射波和反射波的电场和磁场进行叠加，媒质 1 中的合成波具有以下特点：

1. 合成波沿 x 向（与界面相切的方向）传播，不再是横电磁波。

对垂直极化，合成波是横电波（即合成波的电场无 x 向分量，但磁场有 x 向分量），记为 TE_x 波；对平行极化，合成波是横磁波（即合成波的磁场无 x 向分量，但电场有 x 向分量），记为 TM_x 波；

2. 合成波的场除相位沿 x 向变化外，振幅沿 z 向发生变化，等相位面上不同的 z 处振幅不同，是非均匀平面波。

平面边界上的垂直入射（正入射）



- 媒质 1 和媒质 2 均为理想介质
- 平面波垂直入射到媒质 1， 2 的平面分界面上
- 反射波的场与透射波的场的特性与入射波场的极化方向无关，不必再区分垂直极化和平行极化



平面边界上的垂直入射 (正入射)

上海交通大学

设 \vec{E}_i 的极化方向沿 x 向

反射波和透射波的电场方向也应沿 x 向

入射波、反射波和透射波的电场和磁场复矢量分别为

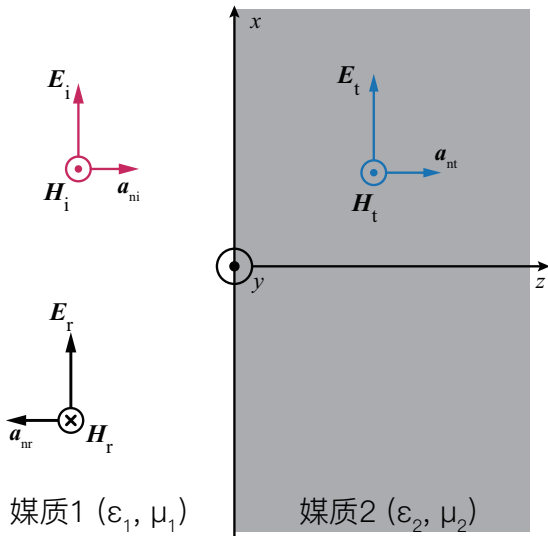
$$\left. \begin{aligned} \text{入射波 } \vec{E}_i &= \vec{a}_x E_{i0} e^{-j\beta_1 z}, \vec{H}_i = \frac{1}{\eta_1} \left(\vec{a}_z \times \vec{E}_i \right) = \vec{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z} \\ \text{反射波 } \vec{E}_r &= \vec{a}_x E_{r0} e^{j\beta_1 z}, \vec{H}_r = \frac{1}{\eta_1} \left[(-\vec{a}_z) \times \vec{E}_r \right] = -\vec{a}_y \frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{j\beta_1 z} \\ \text{透射波 } \vec{E}_t &= \vec{a}_x E_{t0} e^{-j\beta_2 z}, \vec{H}_t = \frac{1}{\eta_2} \left[\vec{a}_z \times \vec{E}_t \right] = \vec{a}_y \frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z} \end{aligned} \right\}$$

$$\beta_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1} = 2\pi/\lambda_1; \quad \beta_2 = 2\pi/\lambda_2; \quad \eta_1 = \sqrt{\mu_1/\varepsilon_1}; \quad \eta_2 = \sqrt{\mu_2/\varepsilon_2}$$



平面边界上的垂直入射 (正入射)

上海交通大学





平面边界上的垂直入射（正入射）

上海交通大学

平面分界面处电场和磁场切向分量连续

$$\left. \begin{aligned} E_{i0} + E_{r0} &= E_{t0} \\ \frac{E_{i0}}{\eta_1} - \frac{E_{r0}}{\eta_1} &= \frac{E_{t0}}{\eta_2} \end{aligned} \right\}$$

反射系数和透射系数分别为

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

$$1 + \Gamma = T$$



平面边界上的垂直入射 (正入射)

上海交通大学

媒质 1 中合成波的电场和磁场复矢量可表示为

$$\vec{E}_1 = \vec{a}_x E_{i0} (e^{-j\beta_1 z} + \Gamma e^{j\beta_1 z}) = \vec{a}_x E_{r0} [\Gamma e^{-j\beta_1 z} + \Gamma (2j \sin \beta_1 z)]$$

$$\vec{H}_1 = \vec{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} (e^{-j\beta_1 z} - \Gamma e^{j\beta_1 z})$$

媒质 2 中的电场和磁场复矢量可表示为

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_t = \vec{a}_x T (E_{i0} e^{-j\beta_2 z})$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_t = \vec{a}_y T \left(\frac{E_{i0}}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z} \right)$$



平面边界上的垂直入射 (正入射)

上海交通大学

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0, \varepsilon_1 < \varepsilon_2,$$

$$\Gamma = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}}{1 + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}} = -|\Gamma|$$

$$T = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}} = 1 - |\Gamma|$$

 \Rightarrow

$$\vec{E}_1 = \vec{a}_x E_{i0} (1 - |\Gamma| e^{j2\beta_1 z}) e^{-j\beta_1 z}$$

$$\vec{H}_1 = \vec{a}_y \frac{E_{i0}}{\eta_1} (1 + |\Gamma| e^{j2\beta_1 z}) e^{-j\beta_1 z}$$



平面边界上的垂直入射 (正入射)

上海交通大学

$|\vec{E}_1|$ $|\vec{H}_1|$ 随 z 的变化出现极大值和极小值, 且呈周期分布

媒质 1 中合成波的场呈驻波, 极大值和极小值的位置都不随时间变化 (standing wave)

场出现极大值的点 \Rightarrow 场的驻波腹点

$$2\beta_1 z_{\max} = -2(m+1)\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad z_{\max} = -(2m+1)\lambda/4$$

$$\left| \vec{E}_1 \right|_{\max} = |E_{i0}| (1 + |\Gamma|)$$

场出现极小值的点 \Rightarrow 场的驻波节点

$$2\beta_1 z_{\min} = -2m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad z_{\min} = -m\lambda/2$$

$$\left| \vec{E}_1 \right|_{\min} = |E_{i0}| (1 - |\Gamma|)$$



平面边界上的垂直入射 (正入射)

上海交通大学

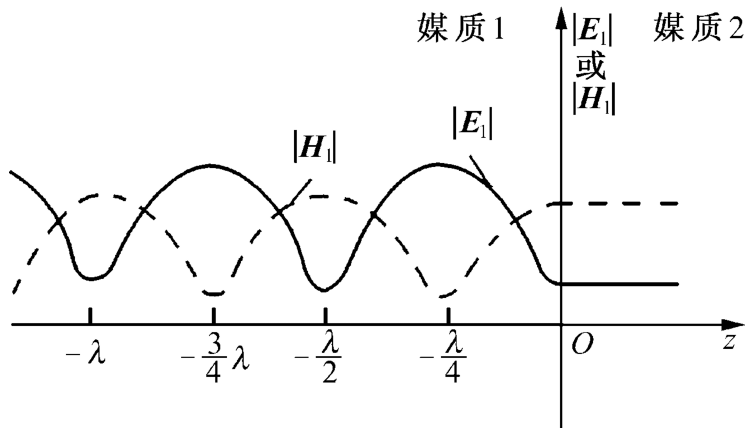


Figure 20: $|\vec{E}_1|$ $|\vec{H}_1|$ 随 z 的变化曲线



平面边界上的垂直入射（正入射）

上海交通大学

行驻波：既有驻波成分又有行波成分形成的波

纯驻波：当第 2 种媒质为理想导体时，媒质 1 中场的驻波节点处振幅为零而其驻波腹点处振幅为 2

$$\Gamma = -1 \quad T = 0$$

电场的驻波系数（驻波比）

电场振幅的极大值与极小值之比，反映行驻波状态的驻波成分的大小

$$\rho = \frac{|E|_{\max}}{|E|_{\min}} = \frac{(1 + |\Gamma|)}{(1 - |\Gamma|)}$$

$$0 \leq |\Gamma| \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \rho < \infty$$



平面边界上的垂直入射（正入射）

上海交通大学

媒质 1 中合成波向正 z 方向传输的平均功率流密度为

$$\left(\vec{S}_1\right)_{av} = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \vec{E}_1 \times \vec{H}_1^* \right] = \left(\vec{S}_1\right)_{av} (1 - |\Gamma|^2)$$

入射波的平均功率减去反射波的平均功率

媒质 2 中向正 z 方向透射的平均功率流密度为

$$\left(\vec{S}_2\right)_{av} = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2} \vec{E}_2 \times \vec{H}_2^* \right] = \frac{\eta_1}{\eta_2} |\mathrm{T}|^2 \left(\vec{S}_i\right)_{av}$$

能量守恒定律

$$\left(\vec{S}_1\right)_{av} = \left(\vec{S}_2\right)_{av} \quad 1 - |\Gamma|^2 = \frac{\eta_1}{\eta_2} |\mathrm{T}|^2$$



平面边界上的垂直入射 (正入射)

上海交通大学

例题

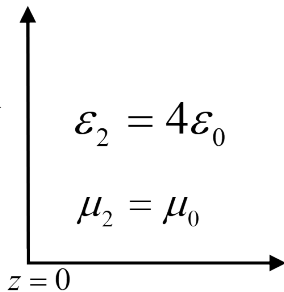
一右旋圆极化波的电场强度复矢量为

$$\vec{E}_i = \vec{a}_x - j\vec{a}_y E_0 e^{-j\beta z}$$

由空气向一理想介质平面垂直入射。

- (1) 写出反射波和透射波的电场强度复矢量表达式；
- (2) 求反射波和透射波相对于入射波的平均功率密度值。

$$\vec{E}_i = (\vec{a}_x - j\vec{a}_y) E_0 e^{-j\beta z}$$





平面边界上的垂直入射（正入射）

上海交通大学

例题

解：(1) 介质交界面处的反射系数、透射系数分别为

$$\eta_1 = \eta_0, \quad \eta_2 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_2} = \eta_0/2$$

$$\Gamma = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = -\frac{1}{3} \quad T = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2}{3}$$

则反射波和透射波的电场强度复矢量分别为

$$\vec{E}_r = \Gamma \vec{E}_{i0} e^{jk_1 z} = \Gamma (\vec{a}_x - j\vec{a}_y) E_0 e^{jkz} = \frac{1}{3} (j\vec{a}_y - \vec{a}_x) E_0 e^{jkz}$$

$$\vec{E}_t = T \vec{E}_{i0} e^{-jk_2 z} = T (\vec{a}_x - j\vec{a}_y) E_0 e^{-jk_2 z} = \frac{2}{3} (\vec{a}_x - j\vec{a}_y) E_0 e^{-j2kz}$$

$$k_2 = 2\pi/\lambda_2 = 2\pi\sqrt{\varepsilon_{r2}}/\lambda_0 = 4\pi/\lambda_0 = 2k$$



平面边界上的垂直入射（正入射）

上海交通大学

例题

(2) 反射波和透射波相对于入射波的平均功率密度值分别为

$$(\vec{S}_i)_{av} = \vec{a}_z |E_{i0}|^2 / 2\eta_1$$

$$(\vec{S}_r)_{av} = -\vec{a}_z |E_{r0}|^2 / 2\eta_1 = -\vec{a}_z |\Gamma|^2 |E_{i0}|^2 / 2\eta_1$$

$$(\vec{S}_t)_{av} = \vec{a}_z |T|^2 |E_{i0}|^2 / 2\eta_2$$

$$\frac{(S_r)_{av}}{(S_i)_{av}} = |\Gamma|^2 = \frac{1}{9} \quad \frac{(S_t)_{av}}{(S_i)_{av}} = |T|^2 = \frac{8}{9}$$



1 6.1 理想媒质中的平面波

2 6.2 导电媒质中的平面波

3 6.3 平面波的极化

4 6.4 平面波的反射与透射

5 6.5 全反射和全透射

6 6.6 作业



6.5.1 全反射

上海交通大学

光密媒质 \rightarrow 光疏媒质 $n_1 > n_2$

$\theta_t = \pi/2$ 时的入射角称为发生全反射的临界角 θ_c

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad \theta_c = \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$



6.5.1 全反射

上海交通大学

对非磁性媒质, 有 $\theta_c = \arcsin \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}$

$$\theta_i > \theta_c \quad \sin \theta_i > \sin \theta_c$$

$$\Rightarrow \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i / n_2 > 1$$

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_t} = \pm j \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i - 1} = \pm j A$$

$$\vec{E}_t = \vec{a}_y E_{i0} T_{\perp} e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 x}$$



6.5.1 全反射

上海交通大学

$\theta_i > \theta_c$ 时, 斯耐尔反射定律仍成立

垂直极化时

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i + j\eta_1 A}{\eta_2 \cos \theta_i - j\eta_1 A} = e^{j\varphi_{\perp}}$$

$$\varphi_{\perp} = 2 \arctan \left[\frac{\eta_1 \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i - 1}}{\eta_2 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}} \right]$$

非磁性媒质时

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$$

$$n_1^2 = \varepsilon_1 / \varepsilon_0$$

$$n_2^2 = \varepsilon_2 / \varepsilon_0$$

$$\phi_{\perp} = 2 \arctan \left[\frac{\sqrt{\sin^2 \theta_i - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}} \right]$$



6.5.1 全反射

上海交通大学

$$\theta_i > \theta_c \text{ 时}$$

- 反射波的场的振幅等于入射波的场的振幅
- 透射波的场随 z 迅速衰减，媒质 2 中的场主要集中在介质分界面附近



6.5.1 全反射

上海交通大学

平行极化反射系数 $\theta_i > \theta_c$

$$\Gamma_{//} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i + \eta_2 \cos \theta_t} = -\frac{\eta_1 \cos \theta_i + j\eta_2 A}{\eta_1 \cos \theta_i - j\eta_2 A} = -1 \cdot e^{j\phi_{//}}$$

$$\phi_{//} = 2 \arctan \left(\frac{\eta_2 A}{\eta_1 \cos \theta_i} \right) = 2 \arctan \left[\frac{\eta_2 \sqrt{\frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i - 1}}{\eta_1 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}} \right]$$

非磁性媒质

$$\phi_{//} = 2 \arctan \left[\frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \sqrt{\sin^2 \theta_i - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_i}} \right]$$

$$T_{//} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_1 \cos \theta_i - j\eta_2 A}$$



6.5.2 全透射

上海交通大学

1) 垂直极化

如上所述，发生全透射时的入射角称为布儒斯特（Brewster）角 θ_B

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} = 0 \quad \theta_i = \theta_{B\perp}$$

\Rightarrow

$$\eta_2 \cos \theta_{B\perp} = \eta_1 \cos \theta_t$$

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i} \quad \Rightarrow \quad \sin^2 \theta_{B\perp} = \frac{1 - (\mu_1 \varepsilon_2) / (\mu_2 \varepsilon_1)}{1 - (\mu_1 / \mu_2)^2}$$



6.5.2 全透射

上海交通大学

对非磁性媒质 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ 不存在 $\theta_{B\perp}$

当垂直极化波入射到两种不同电介质的交界面上时，任何入射角上都将有反射而不会发生全透射。

磁性媒质 $\mu_1 \neq \mu_2$ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$

$$\sin \theta_{B\perp} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\mu_1/\mu_2)}}$$



6.5.2 全透射

上海交通大学

2) 平行极化

$$\Gamma_{//} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_2 \cos \theta_t = \eta_1 \cos \theta_{B//}$$

$$\sin^2 \theta_{B//} = \frac{1 - (\mu_2 \varepsilon_1) / (\mu_1 \varepsilon_2)}{1 - (\varepsilon_1 / \varepsilon_2)^2}$$

对非磁性媒质 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$

$$\theta_{B//} = \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} = \arctan \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}$$

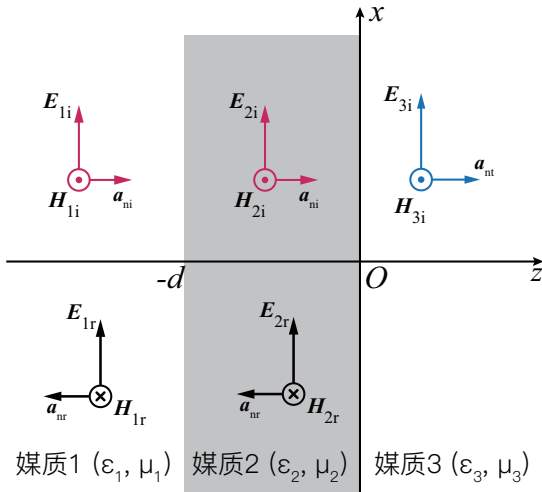
当由垂直极化波和平行极化波一起合成的波以布儒斯特角入射到两种非磁性媒质的交界面上时，反射波只有垂直极化成分。



6.5 多层介质表面的垂直入射 (正入射)

上海交通大学

考虑三层媒质的情况





数值孔径 (NA)

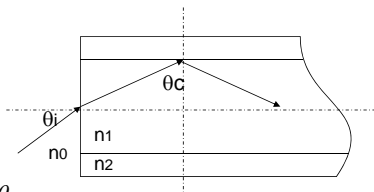
上海交通大学

数值孔径(NA)

根据Snell定理，子午光线产生内全反射的**最大入射角** θ_i 满足：

$$n_0 \sin \theta_i = n_1 \cos \theta_c$$

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin 90^\circ = n_2 \Rightarrow \cos \theta_c = \sqrt{1 - (n_2/n_1)^2}$$



所有以小于**最大入射角**投射到光纤端面的光线都将进入纤芯，并在纤芯包层界面上被内全反射。

定义：数值孔径为 $NA = n_0 \sin \theta_i = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = n_1 (2\Delta)^{1/2}$

其中， Δ 为相对折射率差

$$\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2} \approx \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$



6.5 多层介质表面的垂直入射（正入射）

上海交通大学

$$1 \quad \vec{E}_1 = \vec{E}_{1i} + \vec{E}_{1r} = \vec{a}_x [E_{1i} e^{-j\beta_1(z+d)} + E_{1r} e^{j\beta_1(z+d)}]$$

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_{1i} + \vec{H}_{1r} = \vec{a}_y \frac{1}{\eta_1} [E_{1i} - E_{1r}]$$

$$2 \quad \vec{E}_1 = \vec{E}_{2i} + \vec{E}_{2r} = \vec{a}_x [E_{2i} e^{-j\beta_2 z} + E_{2r} e^{j\beta_2 z}]$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_{2i} + \vec{H}_{2r} = \vec{a}_y \frac{1}{\eta_2} [E_{2i} - E_{2r}]$$

$$3 \quad \vec{E}_3 = \vec{E}_{3i} = \vec{a}_x E_{3i} e^{-j\beta_3 z}$$

$$\vec{H}_3 = \vec{H}_{3i} = \vec{a}_y \frac{1}{\eta_3} E_{3i} e^{-j\beta_3 z}$$



6.5 多层介质表面的垂直入射 (正入射)

上海交通大学

2 区:

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 &= \vec{E}_{2i} + \vec{E}_{2r} \\ &= \vec{a}_x [(E_{2i}^{(1)} + E_{2i}^{(2)} + \dots)e^{-j\beta_2 z} + (E_{2r}^{(1)} + E_{2r}^{(2)} + \dots)e^{j\beta_2 z}]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H}_{2r} &= \vec{H}_{2i} + \vec{H}_{2r} = \vec{a}_y \left(\frac{E_{2i}}{\eta_2} - \frac{E_{2r}}{\eta_2} \right) \\ &= \vec{a}_y \frac{1}{\eta_2} [(E_{2i}^{(1)} + E_{2i}^{(2)} + \dots)e^{-j\beta_2 z} - (E_{2r}^{(1)} + E_{2r}^{(2)} + \dots)e^{j\beta_2 z}]\end{aligned}$$



6.5 多层介质表面的垂直入射（正入射）

上海交通大学

3 区:

$$\vec{E}_3 = \vec{a}_x (E_{3i}^{(1)} + E_{3i}^{(2)} + \dots) e^{-j\beta_3 z}$$

$$\vec{H}_3 = \vec{a}_y \frac{1}{\eta_3} (E_{3i}^{(1)} + E_{3i}^{(2)} + \dots) e^{-j\beta_3 z}$$

式中 E_{1i} 是已知量, $E_{1r}, E_{2i}, E_{2r}, E_{3i}$ 是未知量



6.5 多层介质表面的垂直入射（正入射）

上海交通大学

在 $z = 0$ 处，由边界条件可得

$$\left. \begin{aligned} (E_{2i} + E_{2r}) &= E_{3i} \\ \frac{1}{\eta_2}(E_{2i} - E_{2r}) &= \frac{1}{\eta_3}E_{3i} \end{aligned} \right\}$$

上两式相除，有

$$\eta_2 \frac{E_{2i} + E_{2r}}{E_{2i} - E_{2r}} = \eta_3$$



6.5 多层介质表面的垂直入射（正入射）

上海交通大学

于是，在 $z = 0$ 处分界面上的反射系数为

$$\Gamma_2(z)|_{z=0} = \Gamma_2(0) = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2}$$

在 $z = -d$ 处，由边界条件，有

$$\left. \begin{aligned} (E_{1i} + E_{1r}) &= E_{2i} [e^{j\beta_2 d} + \Gamma_2(0)e^{-j\beta_2 d}] \\ \frac{1}{\eta_1}(E_{1i} - E_{1r}) &= \frac{E_{2i}}{\eta_2} [e^{j\beta_2 d} - \Gamma_2(0)e^{-j\beta_2 d}] \end{aligned} \right\}$$



6.5 多层介质表面的垂直入射（正入射）

上海交通大学

上两式相除，有

$$\eta_1 \frac{E_{1i} + E_{1r}}{E_{1i} - E_{1r}} = \eta_2 \frac{e^{j\beta_2 d} + \Gamma_2(0)e^{-j\beta_2 d}}{e^{j\beta_2 d} - \Gamma_2(0)e^{-j\beta_2 d}}$$

为了便于分析多层介质表面的垂直入射问题，下面引出输入波阻抗的概念。



6.5 多层介质表面的垂直入射（正入射）

上海交通大学

(1) 半波介质夹层

在三层（电）介质中，若 $\eta_1 = \eta_3$ ，且夹在介质 1 和介质 3 中的介质层 2 的厚度为该层中平面波波长 λ_2 的半整数倍，即 $\beta_2 d = m\pi$ ，
 $d = m\lambda_2/2$ ， $m = 1, 2, 3, \dots$ 则由上式，可得

$$Z_1(-d) = Z_{l1} = \eta_3 = \eta_1$$

于是， $\Gamma_1(-d) = 0$

6.5 多层介质表面的垂直入射（正入射）

上海交通大学



(2) 消除反射的四分之一波长介质层

在三层（电）介质中，若在介质 1 和介质 3 之间放置厚度为 $\lambda_2/4$ 的介质层，且厚度为 $\lambda_2/4$ 介质层的本征阻抗是两边介质的本征阻抗的几何平均值，便可消除电磁波由介质 1 向介质 2 传播时在其交界面处引起的反射。



1 6.1 理想媒质中的平面波

2 6.2 导电媒质中的平面波

3 6.3 平面波的极化

4 6.4 平面波的反射与透射

5 6.5 全反射和全透射

6 6.6 作业



6-1, 6-3, 6-5, 6-6, 6-8, 6-10, 6-11

6-12, 6-13, 6-15, 6-17, 6-20, 6-22

6-24, 6-29, 6-30, 6-31, 6-35, 6-38, 6-39



感谢聆听!

主讲人: 何广强
地址: 上海交通大学
电子工程系
邮箱: gqhe@sjtu.edu.cn
主页: qnp.sjtu.edu.cn

