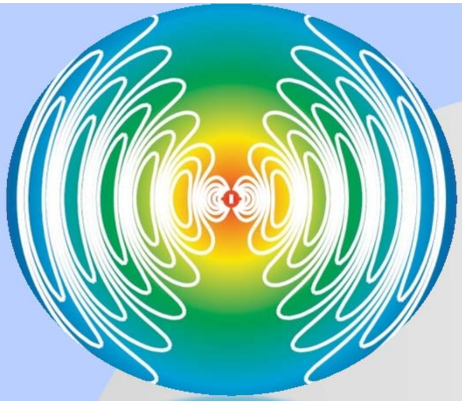
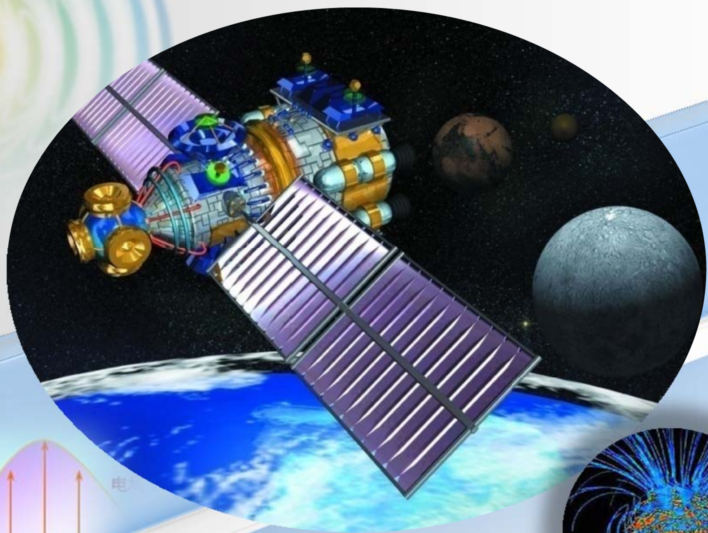
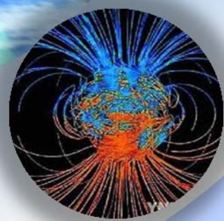
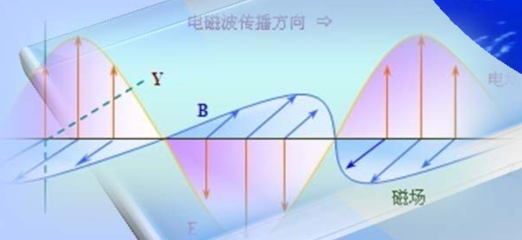


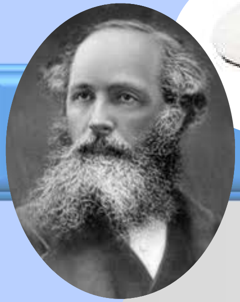
电磁场与波







何广强
电话： 021-34208104
Email:gqhe@sjtu.edu.cn
办公室： 电信楼群1-313

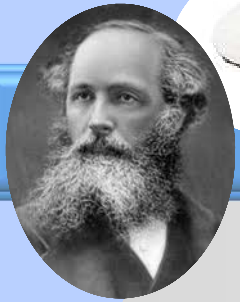



绪 论

一、课程的性质与任务

《电磁场与波》介绍的电磁场理论是人类在长期社会实践所发现的实验定律和定理的基础上，经过理论概括形成的一门科学，其研究的对象是电磁场的基本属性、运动规律以及它与其他物质的相互作用。本课程是电类各专业的一门重要的技术基础课，其目的是为后续相关专业课提供必要的理论基础。

本课程以大学物理以及工程数学为基础，较系统地阐述电磁场的本质及其普遍运动规律，使学生较透彻地掌握与电磁场有关的基本概念，熟悉电磁场的运动规律；较深入地阐述平面电磁波、导行电磁波以及电磁波辐射的基本规律和分析方法，进而进一步认识电磁场的本质和运动规律。本课程以麦克斯韦方程组为主线，强调系统性、逻辑性和实用性。通过课程的学习，掌握基本的宏观电磁理论，具备分析和解决基本的电磁场工程问题的能力。



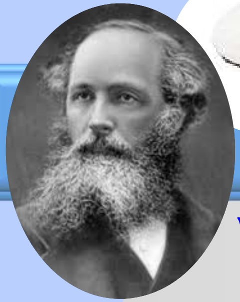

绪 论

二、考核方法

平时成绩 根据出勤与作业成绩决定
期末考试

三、教学内容

① 第一章：矢量分析与场论；
② 第二章：静电场
③ 第三章：恒定电场；
④ 第四章：静磁场；
⑤ 第五章：时变电磁场电；
⑥ 第六章：平面电磁波；
⑦ 第七章：导行电磁波；
⑧ 第八章：电磁波的辐射和接收的基础理论

绪 论

四、教材及参考书

1）教材：

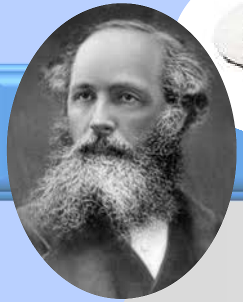
周希朗，电磁场与波基础教程，机械工业出版社，2014

2）参考书：

1. 周希朗，电磁场理论与微波技术基础解题指导，东南大学出版社，2005
2. 谢处方、饶克谨，电磁场与电磁波，高等教育出版社，1990及以后版本

课件下载

ftp：ftp://public.sjtu.edu.cn
帐号：gqhe
密码：Public（P大写）

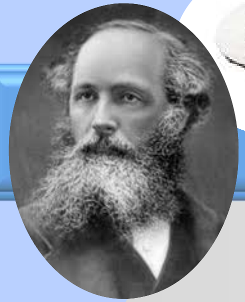


第一章 矢量分析

矢量分析是研究电磁场与微波技术的主要数学工具之一，掌握本章的知识将为今后系统学习其他章节的内容奠定必要的基础。

主要内容：

1. 矢量的表示及其代数运算；
2. 标量场的梯度；
3. 矢量场的通量、散度和散度定理；
4. 矢量场的环量、旋度和斯托克斯定理；
5. 标量场、矢量场的重要性质与定理；
6. 正交曲线坐标系



1.1 矢量的表示及其代数运算

❖ 1.1.1 矢量的表示及距离矢量

1）矢量的表示

习惯上用黑体符号或在符号上加单向箭头 表示矢量，如矢量A可表示为 $\boldsymbol{A}$ 或 $\vec{A}$ 。大小（又称为模值）为1的矢量称为单位矢量，它没有量纲。矢量的单位矢量用 $\vec{a}_A$ 表示，即 $\vec{A}=\vec{a}_A A$ 。在直角坐标系中，矢量 $\vec{A}$ 可表示为

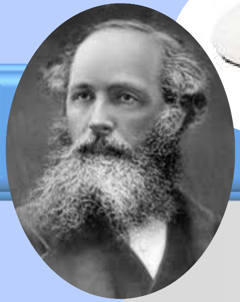
$$\vec{A}=\vec{a}_x A_x+\vec{a}_y A_y+\vec{a}_z A_z$$

该矢量的模为

$$\left|\vec{A}\right|=A=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}$$

矢量 $\vec{A}$ 的单位矢量 $\vec{a}_A$ 为

$$\vec{a}_A=\frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|}=\vec{a}_x\frac{A_x}{A}+\vec{a}_y\frac{A_y}{A}+\vec{a}_z\frac{A_z}{A}=\vec{a}_x\cos\alpha+\vec{a}_y\cos\beta+\vec{a}_z\cos\gamma$$



2）位置矢量（矢径）与距离矢量

在直角坐标系中，从坐标原点出发向空间任一点$p(x,y,z)$引出的有向线段称为该点的位置矢量或矢径，用 $\vec{r}$ 表示，如图1所示。距离矢量 $\vec{R}$ 的表示式为

$$\vec{R}=\vec{r}-\vec{r}\,'=\vec{a}_x(x-x')+\vec{a}_y(y-y')+\vec{a}_z(z-z')$$

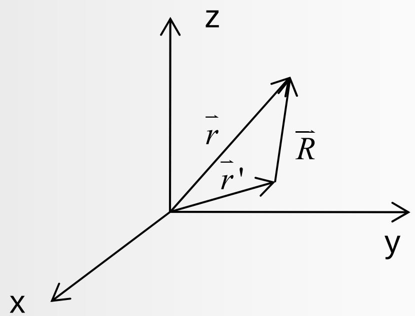
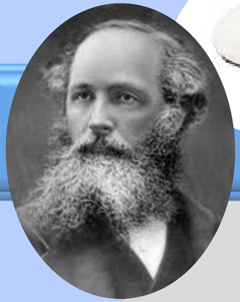


图1　直角坐标系中的位置矢量

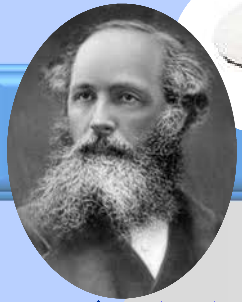


$\vec{R}$ 的模 R 为

$$R = \left|\vec{R}\right| = \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

而它的单位矢量为

$$\vec{a}_R = \frac{\vec{R}}{R} = \vec{a}_x \frac{(x-x')}{R} + \vec{a}_y \frac{(y-y')}{R} + \vec{a}_z \frac{(z-z')}{R}$$




❖ 1.1.2 矢量的代数运算

1）矢量加法

设矢量 $\vec{B}=\vec{a}_x B_x+\vec{a}_y B_y+\vec{a}_z B_z$ ， $\vec{A}+\vec{B}$ 则为

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{a}_x(A_x+B_x)+\vec{a}_y(A_y+B_y)+\vec{a}_z(A_z+B_z)$$

矢量加法满足交换律和结合律，即

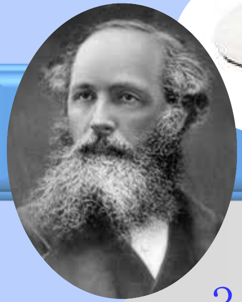
（a）交换律： $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$

（b）结合律：$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$

2）矢量减法

矢量 $\vec{A}$ 与矢量 $\vec{B}$ 相加称为矢量 $\vec{A}$ 与矢量 $-\vec{B}$ 的差记为 $\vec{A}-\vec{B}$，即

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})=\vec{a}_x(A_x-B_x)+\vec{a}_y(A_y-B_y)+\vec{a}_z(A_z-B_z)$$



3）矢量的乘积

（1）矢量的数乘

$k\vec{A}=\vec{a}_A(kA)$ 设k为任意常数，则

（2）矢量的标量积（标积）

矢量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的标量积记为 $\vec{A}\bullet\vec{B}$ ，其大小等于 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的模与它们间夹角的余弦的乘积 $\vec{A}\bullet\vec{B}=AB\cos\theta_{AB}$ ，式中 θ_{AB} 是 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 之间较小的夹角，即 $\theta_{AB}\le 180^\circ$

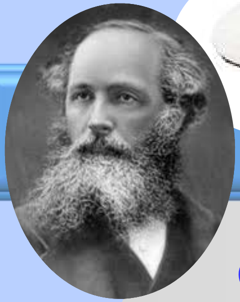
两矢量的标量积满足交换律和分配律，即 ：

a) $\vec{A}\bullet\vec{B}=\vec{B}\bullet\vec{A}$

b) $\vec{A}\bullet(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\bullet\vec{B}+\vec{A}\bullet\vec{C}$

但结合律不适用于标量积，因为这样的表达式无意义。 在直角坐标系下

$$\vec{A}\bullet\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$



（3）　两矢量的矢量积（矢积）

矢量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ 的矢量积记为 $\vec{A}\times\vec{B}$ ，它是一个矢量，即

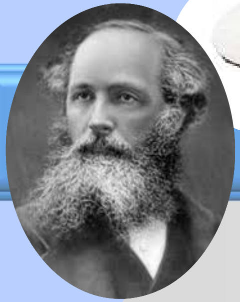
$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{a}_n AB\sin\theta_{AB}$$

矢量积满足分配律，即

$$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$$

矢量积不满足交换律，即

$$\vec{B}\times\vec{A}=-\vec{A}\times\vec{B}$$



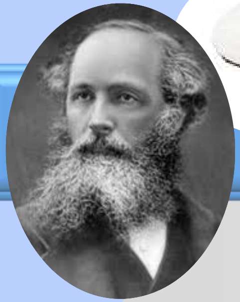

矢量积不满足结合律，即

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$$

因此书写时不要将括弧省略。

在直角坐标系下

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$



（4） 三个矢量的乘积

三个矢量的乘积有两个，即三重标量积和三重矢量积。

① 三重标量积公式：

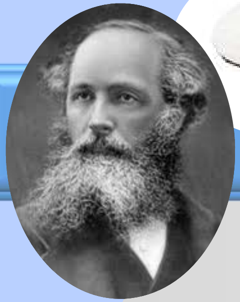
$$\vec{A}\bullet(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}\bullet(\vec{C}\times\vec{A})=\vec{C}\bullet(\vec{A}\times\vec{B})$$

式中 $\vec{A}$ ，$\vec{B}$ 和 $\vec{C}$ 的次序满足循环互换规律。

② 三重矢量积公式：

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\bullet\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\bullet\vec{B})$$

此式被称为“back-cab”规则。



1.2 标量场和矢量场

矢量代数运算中涉及的矢量是常矢量，常矢量是大小和方向均不变的矢量。大小和方向之一或两者都变化的矢量，这种矢量称为变矢量。

场是一个标量或一个矢量的位置函数，即场中任一个点都有一个确定的标量或矢量。

例如，在直角坐标下：

$$\phi(x,y,z)=\frac{5}{4\pi\,[(x-1)^2+(y+2)^2+z^2]}$$

标量场

如温度场、电位场、高度场等；

$$\vec{A}(x,y,z)=2xy^2\vec{a}_x+x^2z\vec{a}_y+xyz\vec{a}_z$$

矢量场

如流速场、电场、涡流场等。

形象描绘场分布的工具——场线

（1）标量场--等值线(面)

其方程为: $h\ (x, y, z) = \text{const}$

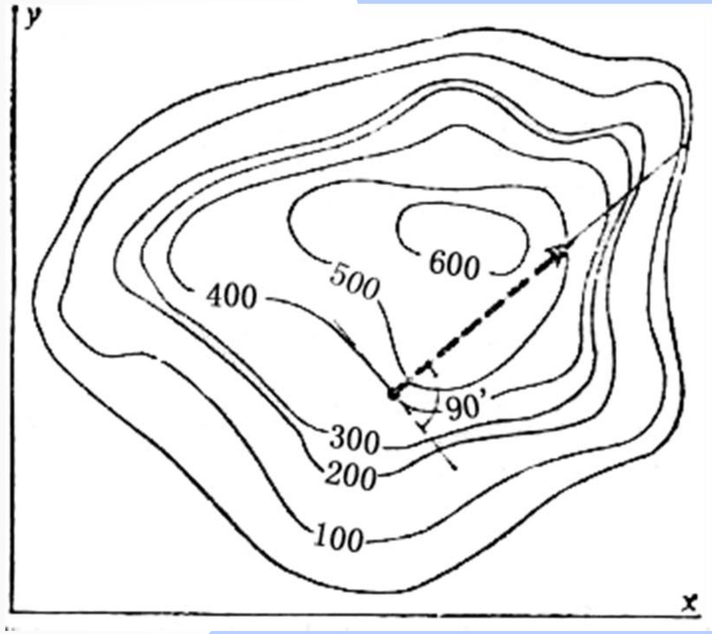
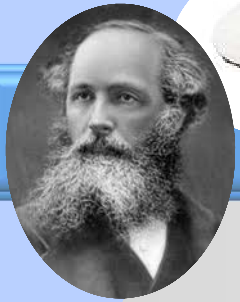


图 2　等高线



（2）矢量场--矢量线

其方程为

$$\vec{A} \times d\vec{l} = 0$$

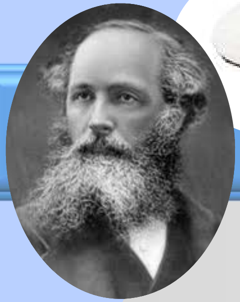
在直角坐标系中

二维场 $$\frac{A_x}{\mathrm{d}x} = \frac{A_y}{\mathrm{d}y}$$

三维场 $$\frac{A_x}{\mathrm{d}x} = \frac{A_y}{\mathrm{d}y} = \frac{A_z}{\mathrm{d}z}$$

若一个场中的每一点所对应的量不仅与该点的位置有关，还与时间有关，则称这种场为动态（时变）场。如果场中的每一点所对应的量与时间无关，则称这种场为静态场

图0.1.2　矢量线



1.3 标量场的梯度

❖ 1. 3. 1 梯度的定义

设一个标量函数$\varphi(x, y, z)$，若函数 φ 在点 p 可微，则 φ 在点p 沿任意方向l 的方向导数为

$$\frac{\partial\phi}{\partial l}=(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z})\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

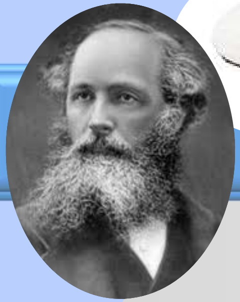
设 $\vec{g}=(\frac{\partial\phi}{\partial x},\frac{\partial\phi}{\partial y},\frac{\partial\phi}{\partial z}),\quad \vec{a}_l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

式中 α ,β , γ 分别是任一方向 l 与 x, y, z 轴的夹角

则有：

$$\frac{\partial\phi}{\partial l}=\vec{g}\bullet\vec{a}_l=|\vec{g}|\cos(\vec{g},\vec{a}_l)$$

当 $\theta=(\vec{g},\vec{a}_l)=0$ ，$\frac{\partial\phi}{\partial l}$ 最大



$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\vec{a}_x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\vec{a}_y+\frac{\partial\phi}{\partial z}\vec{a}_z=\nabla\phi=\mathrm{grad}\phi$$

——梯度(gradient)

式中 $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$

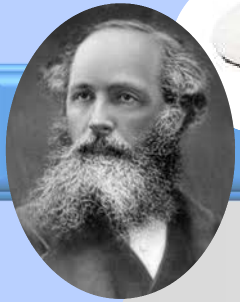
——哈密顿算子

梯度的意义

标量场的梯度是一个矢量，是空间坐标点的函数。

梯度的大小为该点标量函数 φ 的最大变化率，即最大方向导数。

梯度的方向为该点最大方向导数的方向。



❖ 1. 3. 2 梯度的基本公式

若k是常数,ϕ 和 ψ 是标量，则

$$\nabla k = 0$$

$$\nabla(\phi \pm \psi) = \nabla\phi \pm \nabla\psi$$

$$\nabla(\phi\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi$$

$$\nabla\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{1}{\psi^2}(\psi\nabla\phi - \phi\nabla\psi)$$

$$\nabla f(\phi) = f'(\phi)\nabla\phi$$

1.4 矢量场的通量、散度与散度定理

❖ 1.4.1 通量

1）面元矢量

一个面（积微）元除了其大小以外，在空间还有一定的取向。如图2所示，可用一个矢量来表示面元。取一个与面元垂直的单位矢量 $\vec{a}_n$，面元的大小为dS，则面元矢量为

$$d\vec{S} = \vec{a}_n dS$$

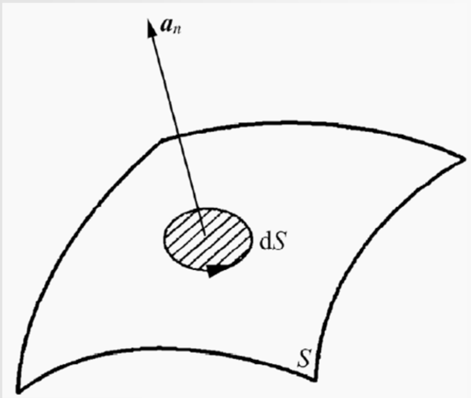
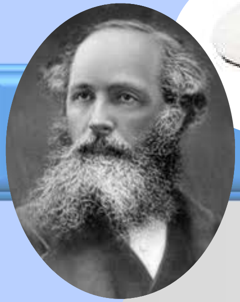


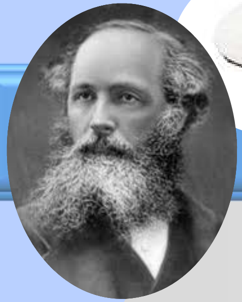
图 2 开曲面上的面元




其中面元矢量的取向有两种情形：

① 对一个开曲面，设此开曲面由一个闭曲线围成，如图2所示，则当开曲面上的面元选定绕行方向后，沿绕行方向按右手螺旋的大拇指方向就是 $\vec{a}_n$ 的方向；

② 当 $d\bar{S}$ 是封闭曲面上的面元，则取为封闭面的外法线方向。



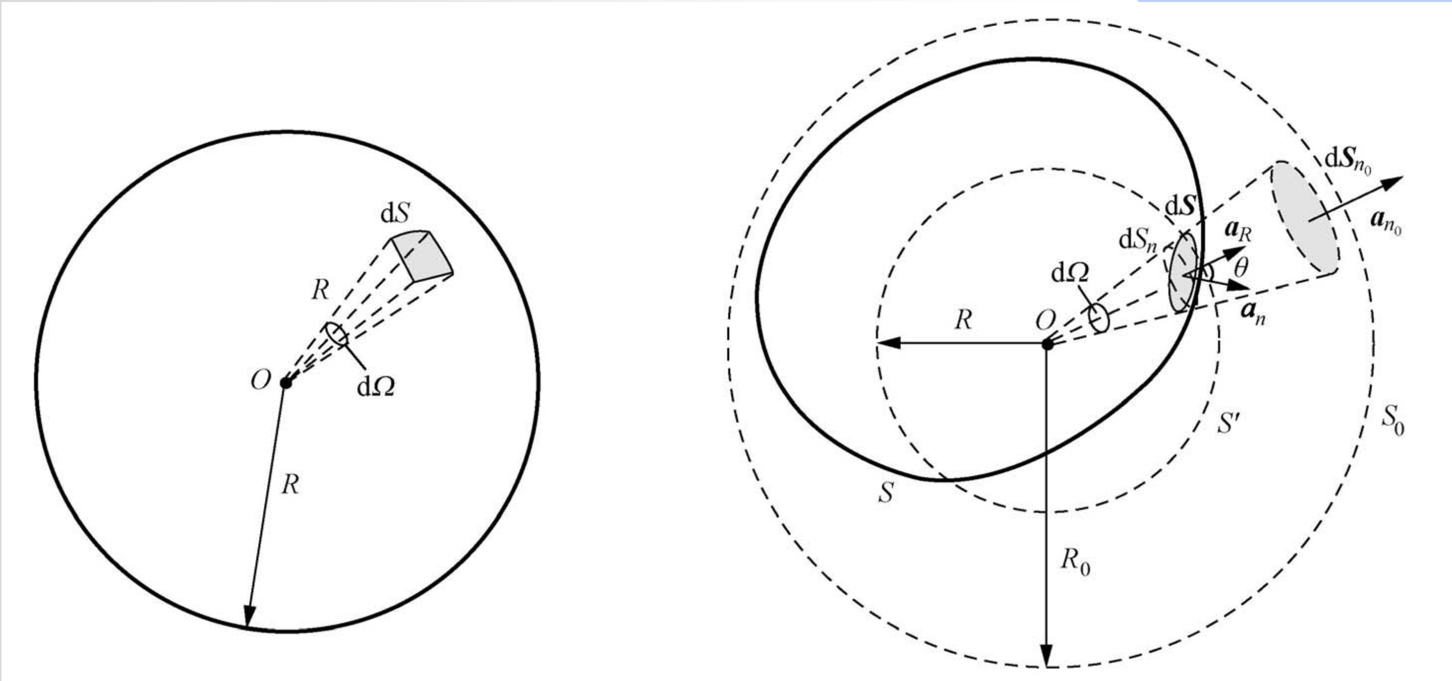

2）立体角

为了求解矢量的通量等参量，通常需引入立体角的概念。图 3（a）中示出了一个半径为 R 的球面，球面上的面元 dS 对球心有一个立体角微元$d\Omega = dS / R^2$ 球面度（或sr），整个球面对球心的立体角为

$$\Omega = \int (dS / R^2) = 4\pi R^2 / R^2 = 4\pi$$

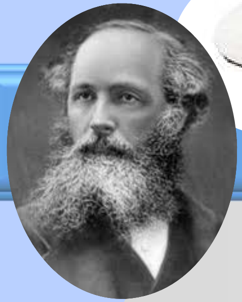
图 3（b）中示出了一个任意闭曲面上的面元矢量 $d\overline{S}$对某点 O 立体角微元$d\Omega$ 的示意图，其表达式为

$$d\Omega = d\overline{S} \bullet \frac{\vec{a}_R}{R^2} = \frac{dS\cos\theta}{R^2} = \frac{dS_n}{R^2}$$



a　　b

图 3　球面和闭曲面上面元的立体角



若点 0 处于闭曲面 S 的内部，则总可以以 0 为球心作一半径为R_0的球面将原闭曲面包含在该球面的内部，从而使整个闭曲面 S 对 0 点的立体角为

$$\Omega = \oint_S d\vec{S} \bullet \frac{\vec{a}_R}{R^2} = \oint_S \frac{dS_{n_0}}{R_0^2} = 4\pi$$

式中，dS_{n_0} 为半径为 R_0 的球面上面元矢量 $d\vec{S}_{n_0}$ 的面元。

3）通量

矢量*E* 沿有向曲面 *S* 的面积分

$$\Phi = \int_S \vec{E} \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

若 *S* 为闭合曲面 $\Phi = \oint_S \vec{E} \bullet d\vec{S}$

根据通量的大小判断闭合面中源的性质：

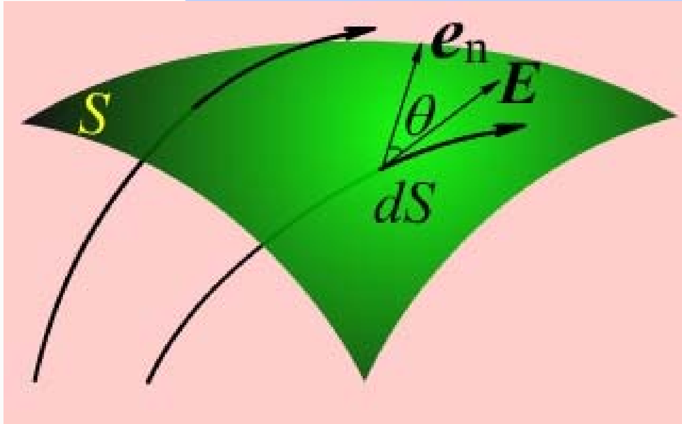
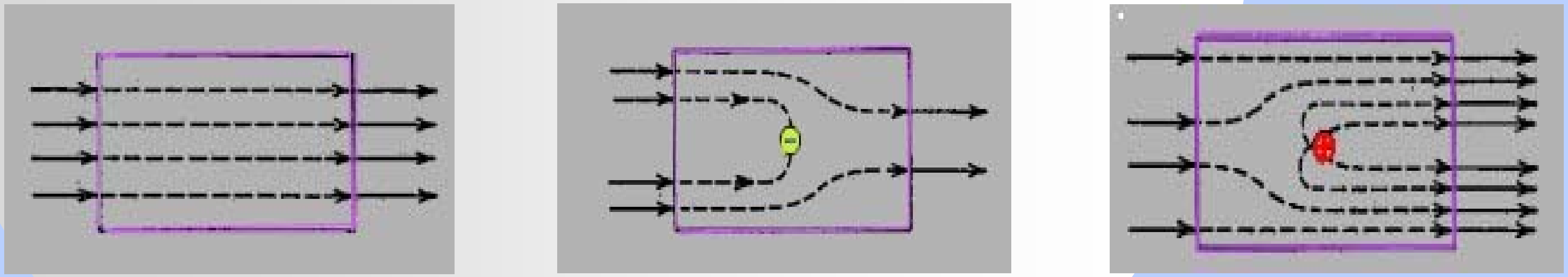
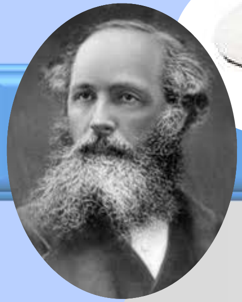


图4 矢量场的通量



$\Phi = 0$（无源） $\Phi < 0$（有负源） $\Phi > 0$（有正源）

图5 矢量场通量的性质



❖ 1.4.2 散度

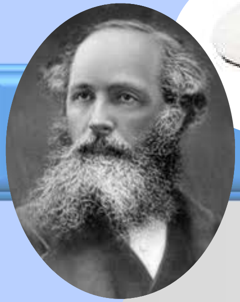
如果包围点 P 的闭合面 ΔS 所围区域 ΔV 以任意方式缩小到点 P 时：

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \int_S \vec{A} \bullet d\vec{S} = \mathrm{div}\vec{A}$$

$$\mathrm{div}\vec{A} = \nabla \bullet \vec{A} = \frac{\partial A_{\mathbf{x}}}{\partial x} + \frac{\partial A_{\mathbf{y}}}{\partial y} + \frac{\partial A_{\mathbf{z}}}{\partial z}$$

——散度（divergence）

若 $\nabla \bullet \vec{A} = 0$ ，则称 $\vec{A}$ 为无散场，或称为管形场。其特点是，穿过场域中任意矢量管所有截面的通量都相等



❖ 1.4.3 散度运算的基本公式

设$\overline{A}$ 和$\overline{B}$ 为矢量，ϕ 为标量，则

$$\nabla \bullet (\overline{A} \pm \overline{B}) = \nabla \bullet \overline{A} \pm \nabla \bullet \overline{B}$$

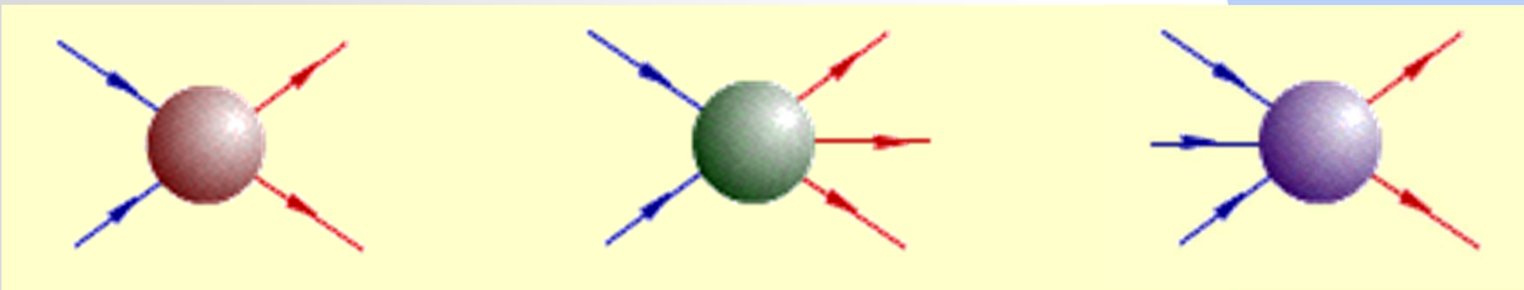
$$\nabla \bullet (\phi \overline{A}) = \phi \nabla \bullet \overline{A} + \overline{A} \bullet \nabla \phi$$

$$\nabla \bullet (\nabla \phi) = \nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

式中，$\nabla \bullet \nabla = \nabla^2$ 称为拉普拉斯（P.S.Laplace）算子


散度的意义

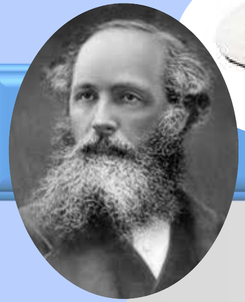
矢量的散度是一个标量，是空间坐标点的函数；



$\nabla\bullet\vec{A}=0$（无源）　　$\nabla\bullet\vec{A}=\rho$（正源）　　$\nabla\bullet\vec{A}=-\rho$（负源）

图6　通量的物理意义

在矢量场中，若$\nabla\bullet\vec{A}=\rho\neq0$，称之为有源场，$\rho$ 称为（通量）源密度；若矢量场中处处 $\nabla\bullet\vec{A}=0$，称之为无源场。



❖ 1.4.4 散度定理（矢量场的高斯定理）

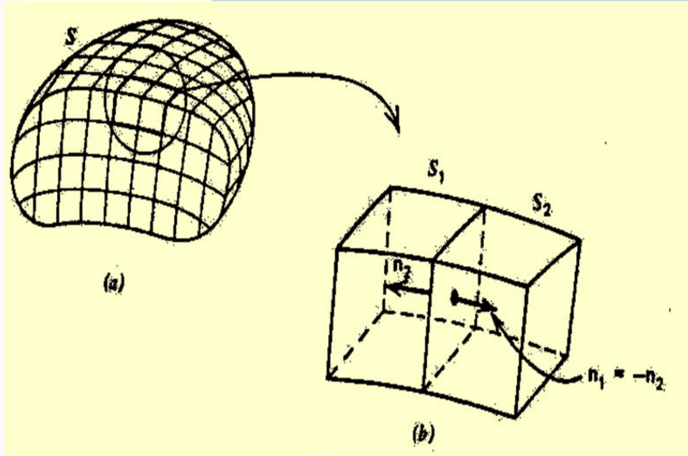


图7 奥高定理

$$\nabla\bullet\vec{A}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\int_S \vec{A}\bullet d\vec{S}$$

—— 通量元密度

$$\Phi=\oint_S \vec{A}\bullet d\vec{S}=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta V_n\to 0}}\sum_{n=1}^{\infty}\nabla\bullet\vec{A}\Delta V_n=\int_V \nabla\bullet\vec{A}dV$$

$$\oint_S \vec{A}\bullet d\vec{S}=\int_V \nabla\bullet\vec{A}dV$$ ——奥高定理

矢量函数的面积分与体积分的相互转换。

1.5 矢量场的环量、旋度与斯托克斯定理

❖ 1.5.1 环量

矢量 A 沿空间有向闭合曲线 L 的线积分

$$\Gamma = \oint_L \vec{A} \bullet d\vec{l}$$

——环量

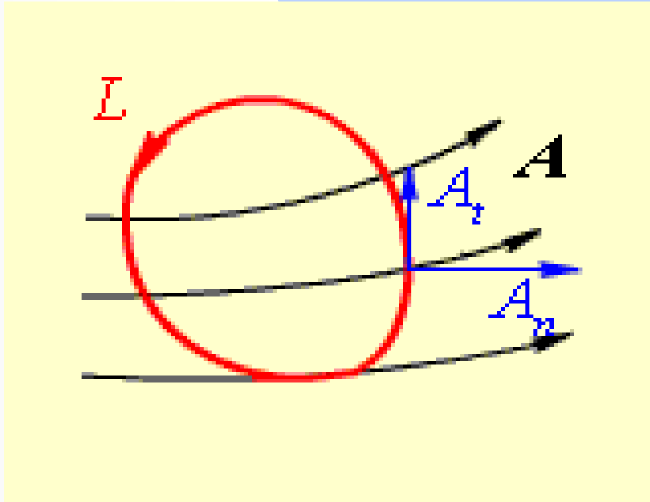


图8　环量的计算

环量的大小与闭合路径有关，它表示绕环线旋转趋势的大小。

例：流速场

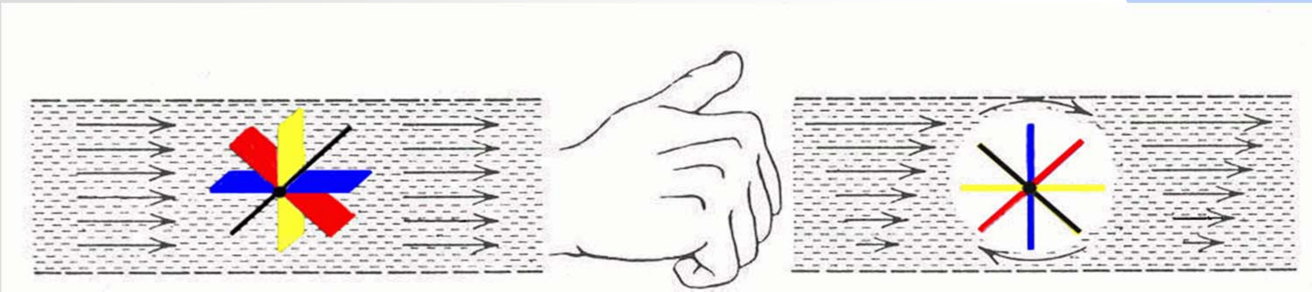


图9 流速场

水流沿平行于水管轴线方向流动，$\Gamma = 0$，无涡旋运动。

流体做涡旋运动，$\Gamma \neq 0$，有产生涡旋的源。

❖ 1.5.2 旋度

1）环量密度

过点 P 作一微小曲面 ΔS，它的边界曲线记为ΔL，面的法线方向与曲线绕向符合右手定则。当 $\Delta S \to$点 P 时，存在极限

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Delta L} \vec{A} \bullet d\vec{l}$$

——环量密度

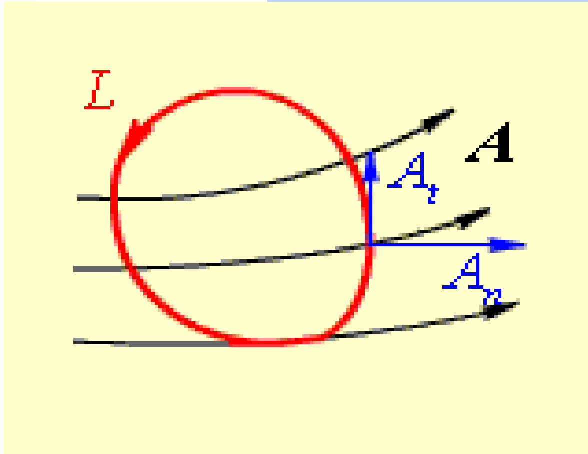
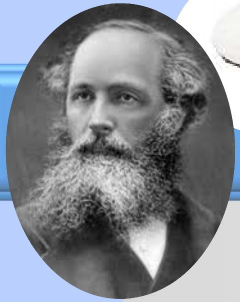


图10

环量密度是单位面积上的环量。



2）旋度

旋度是一个矢量，其大小等于环量密度的最大值；其方向为最大环量密度的方向

$$\mathrm{rot}\,\vec{A} = \nabla \times \vec{A}$$ **——旋度(curl)**

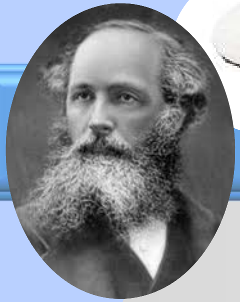
它与环量密度的关系为

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}S} = (\nabla \times \vec{A}) \bullet \vec{a}_{\mathrm{n}}$$

$\vec{a}_{\mathrm{n}} - S$ 的法线方向

在直角坐标下:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$



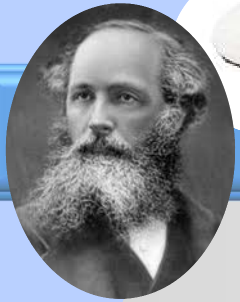

3） 旋度的物理意义

a. 矢量的旋度仍为矢量，是空间坐标点的函数。

b. 某点旋度的大小是该点环量密度的最大值，其方向是最大环量密度的方向。

c. 在矢量场中，若 $\nabla\times\vec{A}=\vec{J}\neq 0$称之为旋度场（或涡旋场），$\vec{J}$ 称为旋度源（或涡旋源）。

d. 若矢量场处处$\nabla\times\vec{A}=0$，称之为无旋场。



❖ 1.5.3旋度运算的基本公式

$$\nabla\times(\vec{A}\pm\vec{B})=\nabla\times\vec{A}\pm\nabla\times\vec{B})$$

$$\nabla\times(\phi\vec{A})=\phi(\nabla\times\vec{A})\pm(\nabla\phi)\times\vec{A}$$

$$\nabla\bullet(\vec{A}\times\vec{B})=\vec{B}\bullet(\nabla\times\vec{A})-\vec{A}\bullet(\nabla\times\vec{B})$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\nabla(\nabla\bullet\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$$

❖ 1.5.4 斯托克斯定理与旋度定理

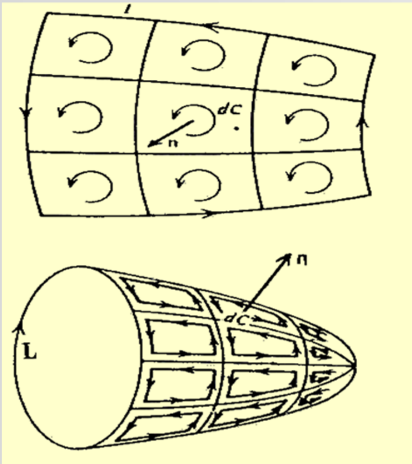


图11　斯托克斯定理

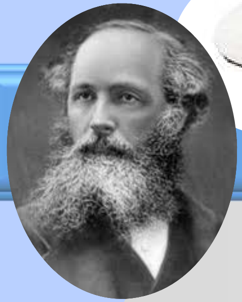
$$\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}S} = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{a}_{\mathrm{n}}$$

$$\mathrm{d}\Gamma = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{a}_{\mathrm{n}} \mathrm{d}S = (\nabla \times \vec{A}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_l \vec{A} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{A}) \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$ ——斯托克斯定理

矢量函数的线积分与面积分的相互转化。

在电磁场理论中，奥高定理 和 斯托克斯定理 是两个非常重要的公式。



旋度定理

$$\int_v (\nabla \times \vec{A}) dV = -\oint_S \vec{A} \times d\vec{S} = \oint_S d\vec{S} \times \vec{A}$$

可用散度定理证明。

例1-1：已知$\vec{A}$ 和 $\vec{k}$ 为常矢量，c为常数，证明：

(1) $\nabla \left(\mathrm{e}^{c\vec{k} \bullet \vec{r}} \right) = c\vec{k}\, \mathrm{e}^{c\vec{k} \bullet \vec{r}}$

(2) $\nabla \bullet \left(\vec{A}\, \mathrm{e}^{c\vec{k} \bullet \vec{r}} \right) = \left(c\vec{k} \bullet \vec{A} \right) \mathrm{e}^{c\vec{k} \bullet \vec{r}}$

(3) $\nabla \times \left(\vec{A}\, \mathrm{e}^{c\vec{k} \bullet \vec{r}} \right) = \left(c\vec{k} \times \vec{A} \right) \mathrm{e}^{c\vec{k} \bullet \vec{r}}$

证：设 $\vec{k}=k_x\vec{a}_x+k_y\vec{a}_y+k_z\vec{a}_z$，其中 k_x,k_y,k_z 为常数 $\vec{r}=x\vec{a}_x+y\vec{a}_y+z\vec{a}_z$，则

$$(1)\quad \nabla\left(e^{c\vec{k}\bullet\vec{r}}\right)=\left(\vec{a}_x\frac{\partial}{\partial x}+\vec{a}_y\frac{\partial}{\partial y}+\vec{a}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left[e^{c(k_x x+k_y y+k_z z)}\right]$$

$$=c(k_x\vec{a}_x+k_y\vec{a}_y+k_z\vec{a}_z)e^{c(k_x x+k_y y+k_z z)}=c\vec{k}\,e^{c\vec{k}\bullet\vec{r}}$$

$$(2)\quad \nabla\bullet(\vec{A}e^{c\vec{k}\bullet\vec{r}})=(\nabla\bullet\vec{A})e^{c\vec{k}\bullet\vec{r}}+\vec{A}\bullet\nabla\left(e^{c\vec{k}\bullet\vec{r}}\right)$$

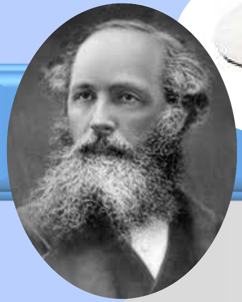
$$=\vec{A}\bullet(c\vec{k}\,e^{c\vec{k}\bullet\vec{r}})=(c\vec{k}\bullet\vec{A})e^{c\vec{k}\bullet\vec{r}}$$

式中，因 $\vec{A}$ 为常矢量，故 $\nabla\bullet\vec{A}=0$

$$(3)\quad \nabla\times(\vec{A}e^{c\vec{k}\bullet\vec{r}})=(\nabla\times\vec{A})e^{c\vec{k}\bullet\vec{r}}+\nabla\left(e^{c\vec{k}\bullet\vec{r}}\right)\times\vec{A}$$

$$=c\vec{k}\,e^{c\vec{k}\bullet\vec{r}}\times\vec{A}=(c\vec{k}\times\vec{A})e^{c\vec{k}\bullet\vec{r}}$$

式中，$\nabla\times\vec{A}=0$



1.6 标量场、矢量场的重要性质和定理

❖ 1.6.1 两个重要性质

性质 1：梯度场的旋度恒为零，即

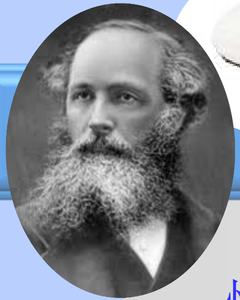
$$\nabla \times \nabla \phi = 0$$

可见，无旋场可表示为一梯度场。即 $\nabla \times \vec{f} = 0$ ，则可令 $\vec{f} = \nabla \phi$（其中 ϕ 可含任一常数 ϕ_0 ）

证明:左边 $= (\frac{\partial}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{a}_z) \times (\frac{\partial u}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{a}_z)$

$$= (\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z})\vec{a}_x + (\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x})\vec{a}_y + (\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})\vec{a}_z$$

$$= 0$$



性质2：旋度场的散度恒为零，即

$$\nabla \bullet (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

可见，无散场可表示为一旋度场。即，若 $\nabla \bullet \vec{f} = 0$ ，则可令$\vec{f}=\nabla \times \vec{A}$（其中 $\vec{A}$ 可含任意常数$\nabla \phi$）

证明:左边 $= (\frac{\partial}{\partial x}\vec{a}_x + \frac{\partial}{\partial y}\vec{a}_y + \frac{\partial}{\partial z}\vec{a}_z)$

$$\bullet((\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z})\vec{a}_x + (\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x})\vec{a}_y + (\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y})\vec{a}_z)$$

$$= (\frac{\partial A_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial A_y}{\partial z \partial x}) + (\frac{\partial A_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial A_z}{\partial x \partial y}) + (\frac{\partial A_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial A_x}{\partial y \partial z})$$

$$= 0$$

1.6.2　三个重要定理

1）格林定理

设任意两个标量场 Φ 及 Ψ，若在区域 V 中具有连续的二阶偏导数，如下图示。

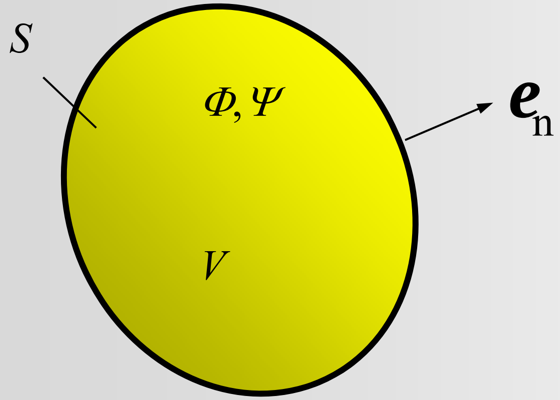


图12

那么，可以证明该两个标量场 Φ 及 Ψ 满足下列等式

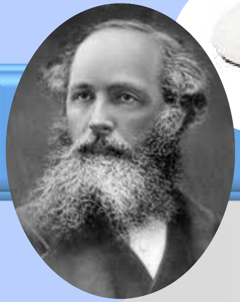
$$\int_V (\nabla\Psi \bullet \nabla\Phi + \Psi\nabla^2\Phi)\mathrm{d}V = \oint_S \Psi \frac{\partial\Phi}{\partial n}\mathrm{d}S$$

式中 S 为包围 V 的闭合曲面，$\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}$ 为标量场 Φ 在 S 表面的外法线 e_n 方向上的偏导数。

根据方向导数与梯度的关系，上式又可写成

$$\int_V (\nabla\Psi \bullet \nabla\Phi + \Psi\nabla^2\Phi)\mathrm{d}V = \oint_S (\Psi\nabla\Phi) \bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

上两式称为**标量第一格林定理**。



基于上式还可获得下列两式：

$$\int_V (\Psi\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Psi)\mathrm{d}V = \oint_S \left(\Psi\nabla\Phi - \Phi\nabla\Psi\right)\bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

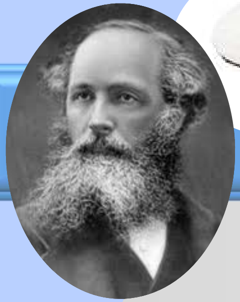
$$\int_V (\Psi\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\Psi)\mathrm{d}V = \oint_S \left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

上两式称为标量第二格林定理。

设任意两个矢量场 P 与 Q，若在区域 V 中具有连续的二阶偏导数，那么，可以证明该矢量场 P 及 Q 满足下列等式

$$\int_V [(\nabla\times\vec{P})\cdot(\nabla\times\vec{Q}) - \vec{P}\cdot\nabla\times\nabla\times\vec{Q}]\mathrm{d}V = \oint_S \left(\vec{P}\times\nabla\times\vec{Q}\right)\bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

式中S 为包围V 的闭合曲面，面元 $\mathrm{d}S$ 的方向为S 的外法线方向，上式称为矢量第一格林定理。



基于上式还可获得下式：

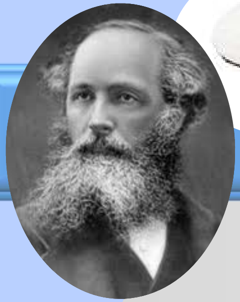
$$\int_V [\vec{Q}\bullet(\nabla\times\nabla\times\vec{P}) - \vec{P}\bullet(\nabla\times\nabla\times\vec{Q})]\mathrm{d}V = \oint_S [\vec{P}\times\nabla\times\vec{Q} - \vec{Q}\times\nabla\times\vec{P}]\bullet \mathrm{d}\vec{S}$$

此式称为矢量第二格林定理。

无论何种格林定理，都是说明区域 V 中的场与边界 S 上的场之间的关系。因此，利用格林定理可以将区域中场的求解问题转变为边界上场的求解问题。

此外，格林定理说明了两种标量场或矢量场之间应该满足的关系。因此，如果已知其中一种场的分布特性，即可利用格林定理求解另一种场的分布特性。

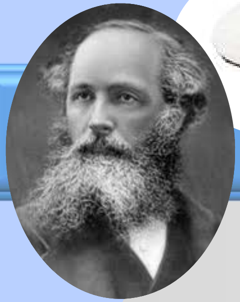
格林定理广泛地用于电磁理论。



2）矢量场的惟一性定理

位于某一区域中的矢量场，当其散度、旋度以及边界上场量的切向分量或法向分量给定后，则该区域中的矢量场被惟一地确定。

已知散度和旋度代表产生矢量场的源，可见惟一性定理表明，矢量场被其源及边界条件共同决定的。




3）亥姆霍兹定理

若矢量场 $\vec{F}(\vec{r})$ 在无限区域中处处是单值的， 且其导数连续有界，源分布在有限区域 V' 中，则当矢量场的散度及旋度给定后，该矢量场 $F(r)$ 可以表示为

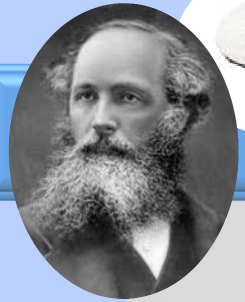
$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla\Phi(\vec{r}) + \nabla\times\vec{A}(\vec{r})$$

式中

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\bullet\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}V'$$

可见，该定理表明任一矢量场均可表示为一个无旋场与一个无散场之和。矢量场的散度及旋度特性是研究矢量场的首要问题。




*）场的分类

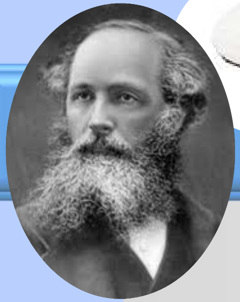
由亥姆霍兹定理可知，一个矢量场的散度和旋度不能单独、完整地描述场。在电磁场理论中，通常根据矢量场的散度和旋度是否为零将电磁场分为四类，即第I、II、III、IV类场。

第I类场

电磁场 $\vec{f}$ 在区域中处处满足 $\nabla \bullet \vec{f} = 0$和 $\nabla \times \vec{f} = 0$ 。$\vec{f} = -\nabla \phi$ 。
又因为$\nabla \bullet \vec{f} = 0$，所以

$$\nabla^2 \phi = 0$$

拉普拉斯方程。为求得第I类场，必须求解拉普拉斯方程及由区域边界构成的定解问题求得 ϕ ，然后由 $\vec{f} = -\nabla \phi$ 确定 $\vec{f}$ 。

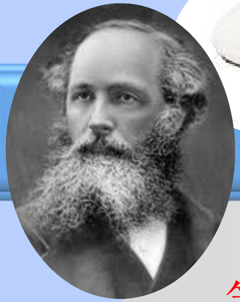



第II类场

电磁场 $\vec{f}$ 在区域中处处满足 $\nabla\bullet\vec{f}\neq 0$ 和 $\nabla\times\vec{f}=0$ 。 $\vec{f}=-\nabla\phi$ 。
又因为 $\nabla\bullet\vec{f}=\rho$，所以

$$\nabla^2\phi=-\rho$$

泊松方程。为求得第II类场，必须求解泊松方程及由区域边界构成的定解问题求得 ϕ ，然后由 $\vec{f}=-\nabla\phi$ 确定 $\vec{f}$ 。




第III类场

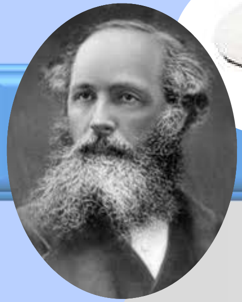
$\vec{f}$ 在区域中满足 $\nabla \bullet \vec{f}=0$ 和 $\nabla\times\vec{f}\neq 0$ 。因 $\nabla \bullet \vec{f}=0$ ，$\vec{f}=\nabla\times\vec{A}$ ，其中 $\vec{A}$ 为另一矢量场。又因 $\nabla\times\vec{f}\neq 0$ ，将它写为 $\nabla\times\vec{f}=\vec{J}$ ，其中 $\vec{J}$ 为一已知矢量场。这样，将 $\vec{f}=\nabla\times\vec{A}$ 代入 $\nabla\times\vec{f}=\vec{J}$ 即得

$$\nabla\times\nabla\times\vec{A}=\vec{J} \quad \text{或} \nabla(\nabla\bullet\vec{A})-\nabla^2\vec{A}=\vec{J}$$

又由亥姆霍兹定理知，为使矢量场 $\vec{f}$ 唯一，必须定义其散度。若采用规范条件 $\nabla\bullet\vec{A}=0$（称为库伦规范条件，详见第2章内容），则有

$$\nabla^2\vec{A}=-\vec{J}$$

这是矢量泊松方程。因此，求得第III类场必须求解矢量泊松方程所构成的定解问题




第IV类场

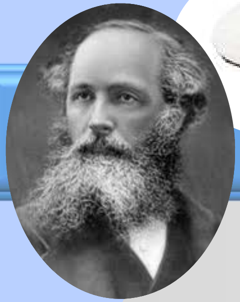
该类场 $\vec{f}$ 在区域中处处满足$\nabla\bullet\vec{f}\neq 0$ 和$\nabla\times\vec{f}\neq 0$ 。但可将 $\vec{f}$ 分解为另外两个矢量场 $\vec{f}_1$ 和 $\vec{f}_2$，使 $\vec{f}_1$ 满足第III类场以及$\vec{f}_2$满足第II类场的要求，即

$$\vec{f}=\vec{f}_1+\vec{f}_2$$

其中 $\nabla\bullet\vec{f}_1=0$，$\nabla\times\vec{f}_1\neq 0$，而 $\nabla\times\vec{f}_2=0$，$\nabla\bullet\vec{f}_2\neq 0$。 则$\vec{f}_1=\nabla\times\vec{A}$ 和 $\vec{f}_2=-\nabla\phi$ ，从而有

$$\vec{f}=\nabla\times\vec{A}-\nabla\phi$$

这正是亥姆霍兹定理中给出的表达式。



1 .7 正交曲线坐标系

❖ 1.7.1 正交曲线坐标系的单位矢量和度量因子

直角坐标系，空间每一点坐标（x, y, z）

正交曲线坐标系，空间每一点坐标(u_1, u_2, u_3)

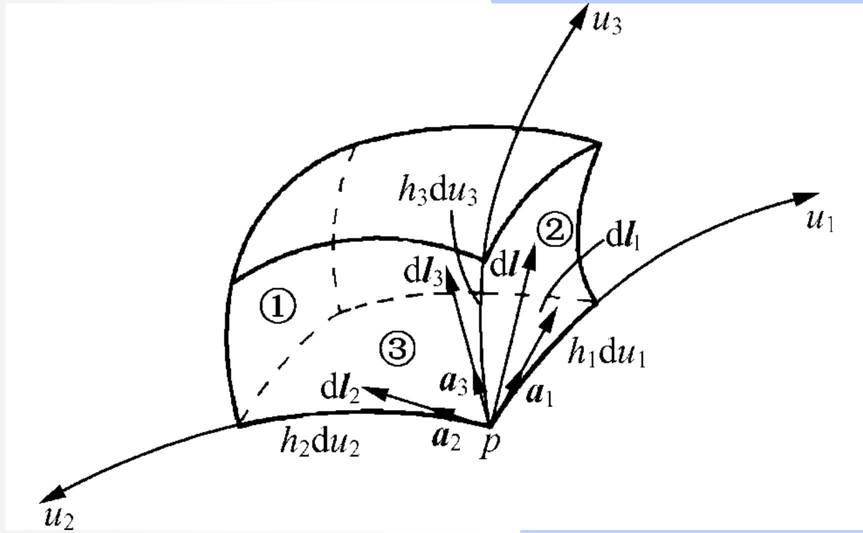


图13

$$\begin{cases} u_1 = g_1(x, y, z) \\ u_2 = g_2(x, y, z) \\ u_3 = g_3(x, y, z) \end{cases} \qquad \begin{cases} x = G_1(u_1, u_2, u_3) \\ y = G_2(u_1, u_2, u_3) \\ z = G_3(u_1, u_2, u_3) \end{cases}$$

正交曲线坐标系：任一点处u_1 线，u_2 线， u_3 线的切线互相正交。

单位矢量： $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3$ （变矢量）；

切矢量： $\vec{l}_1,\vec{l}_2,\vec{l}_3$; ；

正交曲线坐标系中：$d\vec{l} = d\vec{l}_1 + d\vec{l}_2 + d\vec{l}_3 = \vec{a}_1 dl_1 + \vec{a}_2 dl_2 + \vec{a}_3 dl_3$

$$= \vec{a}_1 h_1 du_1 + \vec{a}_2 h_2 du_2 + \vec{a}_3 h_3 du_3$$

直角坐标系中：$d\vec{l} = \vec{a}_x dx + \vec{a}_y dy + \vec{a}_z dz$

1) 正交曲线坐标系的单位矢量

$d\vec{l}$ 沿$\vec{u}_1$ 方向，u_2 ，u_3 为常数，$du_2 = du_3 = 0$，

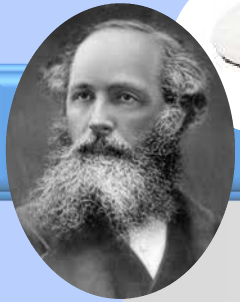
$$\vec{a}_1 = \frac{d\vec{l}}{h_1 du_1} = \frac{\vec{a}_x dx + \vec{a}_y dy + \vec{a}_z dz}{h_1 du_1}$$

$$= \vec{a}_x \frac{1}{h_1}\frac{\partial G_1}{\partial u_1} + \vec{a}_y \frac{1}{h_1}\frac{\partial G_2}{\partial u_1} + \vec{a}_z \frac{1}{h_1}\frac{\partial G_3}{\partial u_1}$$

采用类似的方法，可得

$$\vec{a}_2 = \frac{d\vec{l}}{h_2 du_2} = \vec{a}_x \frac{1}{h_2}\frac{\partial G_1}{\partial u_2} + \vec{a}_y \frac{1}{h_2}\frac{\partial G_2}{\partial u_2} + \vec{a}_z \frac{1}{h_2}\frac{\partial G_3}{\partial u_2}$$

$$\vec{a}_3 = \frac{d\vec{l}}{h_3 du_3} = \vec{a}_x \frac{1}{h_3}\frac{\partial G_1}{\partial u_3} + \vec{a}_y \frac{1}{h_3}\frac{\partial G_2}{\partial u_3} + \vec{a}_z \frac{1}{h_3}\frac{\partial G_3}{\partial u_3}$$




2）正交曲线坐标系的度量因子

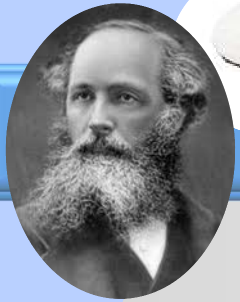
$$dl = [(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]^{\frac{1}{2}}$$

沿 $\vec{u}_1$方向，
$$dl_1 = [(\frac{\partial G_1}{\partial u_1})^2 + (\frac{\partial G_2}{\partial u_1})^2 + (\frac{\partial G_3}{\partial u_1})^2]^{\frac{1}{2}} du_1 = h_1 du_1$$

沿 $\vec{u}_2$方向，
$$dl_2 = [(\frac{\partial G_1}{\partial u_2})^2 + (\frac{\partial G_2}{\partial u_2})^2 + (\frac{\partial G_3}{\partial u_2})^2]^{\frac{1}{2}} du_2 = h_2 du_2$$

沿 $\vec{u}_3$方向，
$$dl_3 = [(\frac{\partial G_1}{\partial u_2})^2 + (\frac{\partial G_2}{\partial u_2})^2 + (\frac{\partial G_3}{\partial u_2})^2]^{\frac{1}{2}} du_2 = h_3 du_3$$

$$dl = [(h_1 du_1)^2 + (h_2 du_2)^2 + (h_3 du_3)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad h_i = [\sum_{j=1}^{3} (\frac{\partial G_j}{\partial u_i})^2]^{\frac{1}{2}}, i = 1, 2, 3$$



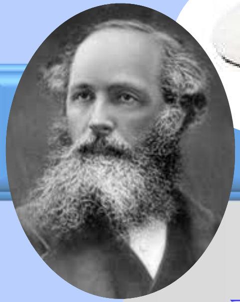

❖ 1.7.2 正交曲线坐标系中场论表达式

正交曲线坐标系

面元矢量 $d\vec{S}_i$ 表达式： $d\vec{S}_i = d\vec{l}_j \times d\vec{l}_k = \vec{a}_i dS_i = \vec{a}_i h_j h_k du_j du_k$

$$\vec{a}_i = \vec{a}_j \times \vec{a}_k, i, j, k \in (1,2,3)$$

体积元表达式 $dV = d\vec{l}_i \bullet (d\vec{l}_j \times d\vec{l}_k) = h_i h_j h_k du_i du_j du_k$



正交曲线坐标系中部分场论表达式

（1）标量场 ϕ 的梯度为

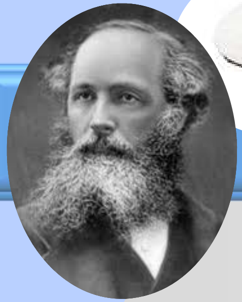
$$\nabla\phi=\vec{a}_1\frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}+\vec{a}_2\frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}+\vec{a}_3\frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}$$

（2）矢量场 $\vec{A}$ 的散度为

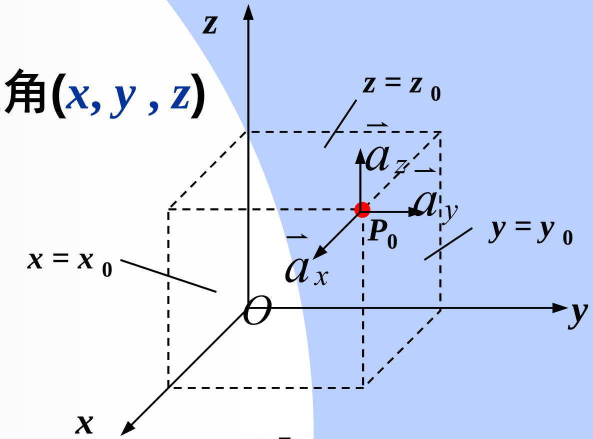
$$\nabla\bullet\vec{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_1h_3A_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right]$$

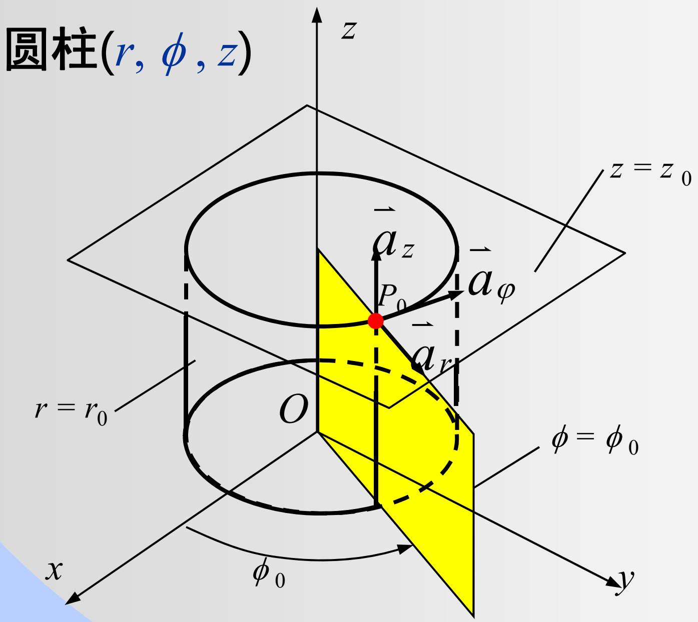
式中A_1，A_2，A_3分别为$\vec{A}$ 在 u_1，u_2，u_3 上的投影

（3） $$\nabla^2\phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(h_2h_3\frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(h_1h_3\frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(h_1h_2\frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\right)\right]$$



❖ 1.7.2 圆柱坐标系、球坐标系与直角坐标系之间的关系





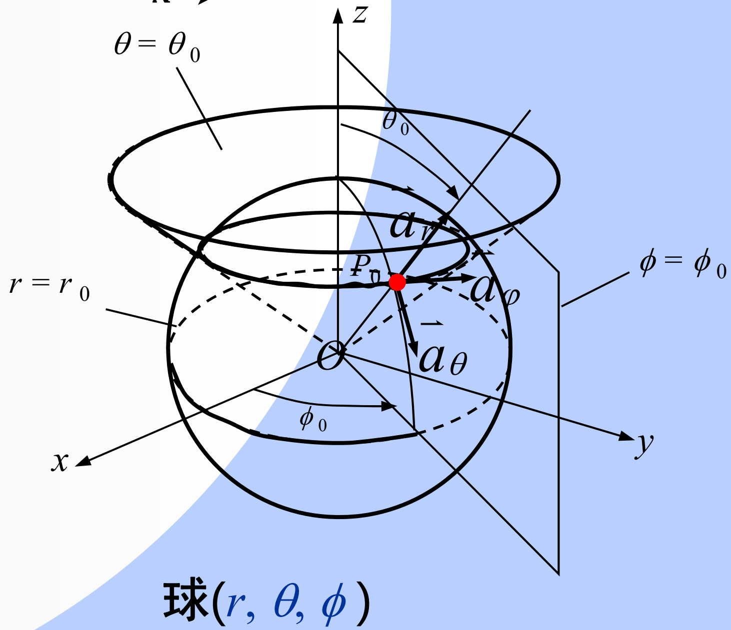
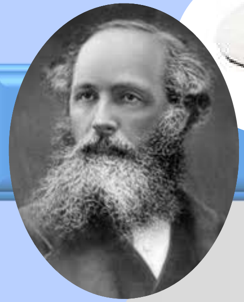


图14



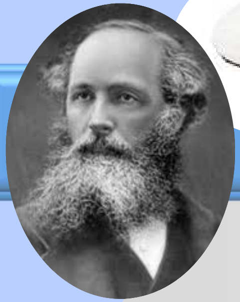
（1）圆柱坐标系

$$x = G_1 = r\cos\varphi,\qquad y = G_2 = r\sin\varphi,\qquad z = G_3 = z$$

$$\begin{cases} \vec{a}_r = \vec{a}_x\cos\varphi + \vec{a}_y\sin\varphi \\ \vec{a}_\varphi = -\vec{a}_x\sin\varphi + \vec{a}_y\cos\varphi \\ \vec{a}_z = \vec{a}_z \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_r \\ \vec{a}_\varphi \\ \vec{a}_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix}$$

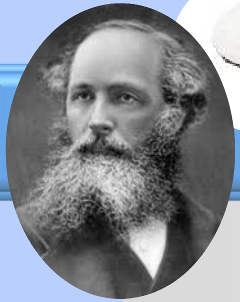
$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\varphi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$



（2）球坐标系

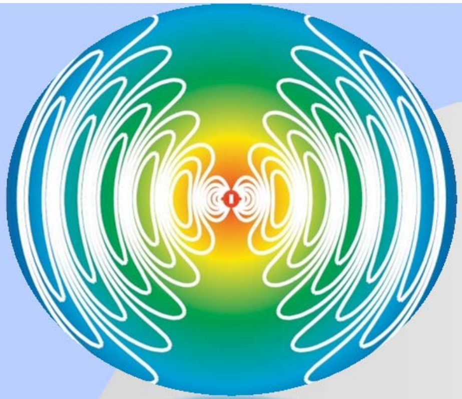
$$x = G_1 = R\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = G_2 = R\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = G_3 = R\cos\theta$$

$$\begin{bmatrix} \vec{a}_R \\ \vec{a}_\theta \\ \vec{a}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \vec{a}_x \\ \vec{a}_y \\ \vec{a}_z \end{bmatrix}$$

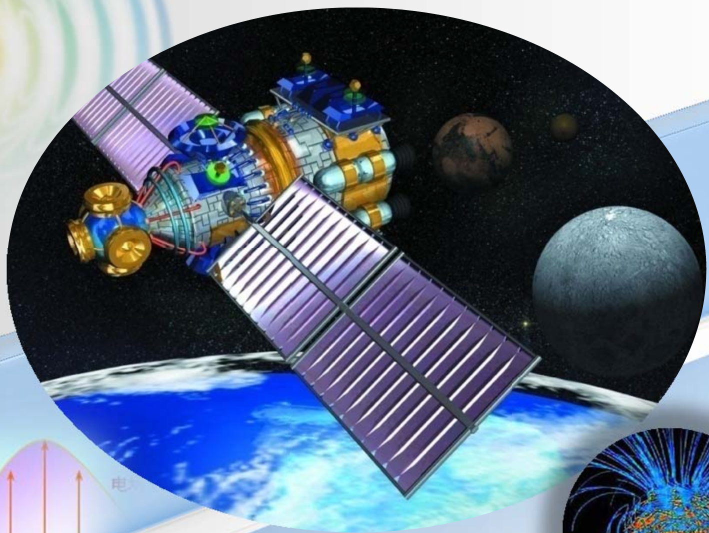


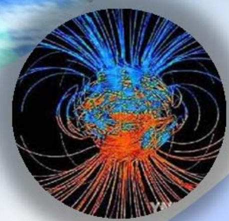
作业内容：1-4, 1-6, 1-7, 1-8, 1-13, 1-21 （9月25日交）

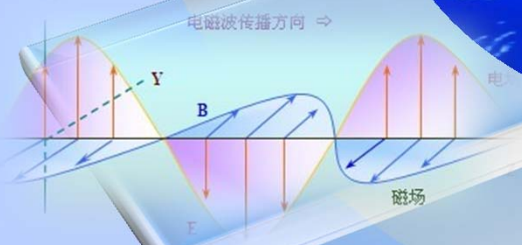
1-28 1-29, 1-31, 1-33, 1-34, (9月30日交)



Thank You !







何广强