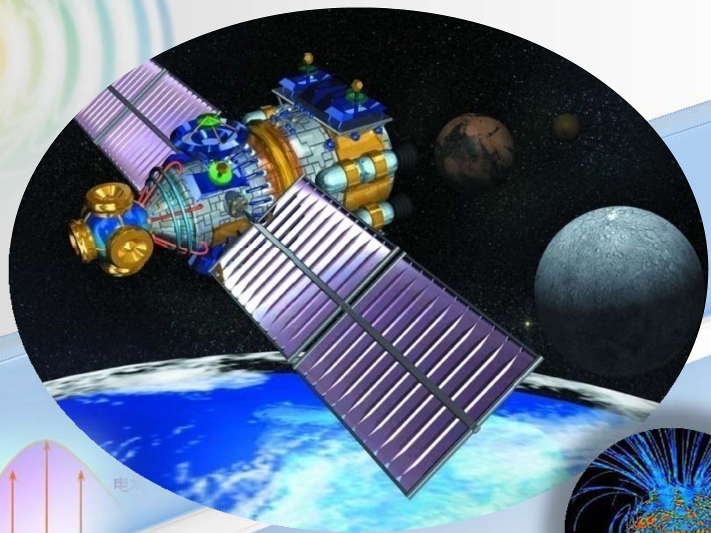
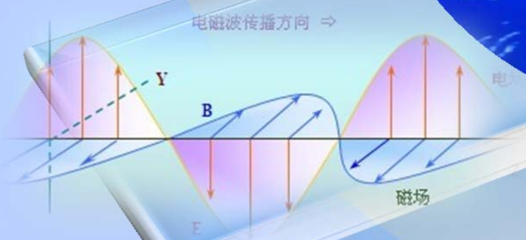
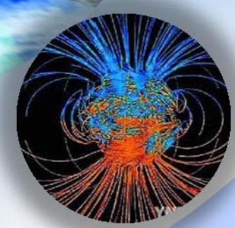
第五章 时变电磁场



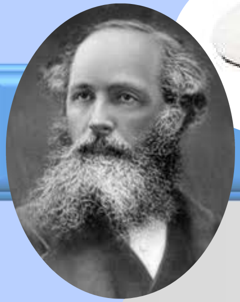




何广强

电话： 021-34204362

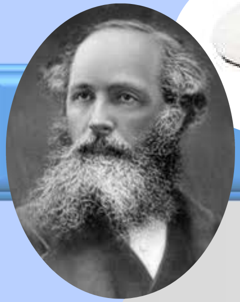
Email: gqhe@sjtu.edu.cn




主要内容

麦克斯韦方程组是宏观电磁理论所遵循的基本规律。

- ❖ **5.1** 电磁感应定律与全电流定律
- ❖ **5.2** 麦克斯韦方程组
- ❖ **5. 3** 时变电磁场的边界条件
- ❖ **5. 4** 坡印亭定理与坡印亭矢量
- ❖ **5. 5** 时谐电磁场的复数表示




5.1 电磁感应定律与全电流定律

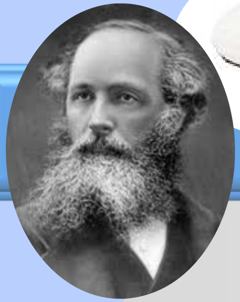
一、电磁感应定律

1. 电磁感应现象与楞次定律

实验表明：当穿过导体的磁通量发生变化时，回路中会出现感应电流。—电磁感应现象

楞次定律：回路总是企图以感应电流产生的穿过回路自身的磁通，去反抗引起感应电流的磁通量的改变。

2. 法拉第电磁感应定律：当穿过导体回路的磁通量发生改变时，回路中的感应电动势与回路磁通量的时间变化率成正比关系。

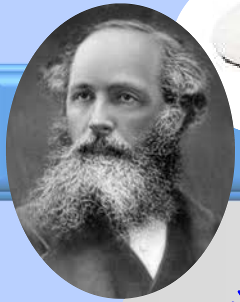


一、电磁感应定律

数学表达式:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

说明：“—”号表示回路中产生的感应电动势的作用总是要阻止回路中磁通量的变化。



法拉第电磁感应定律的微分形式

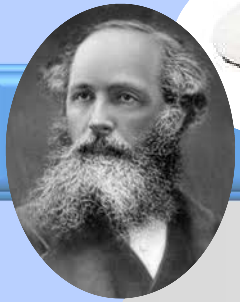
$$\left.\begin{array}{ll}\varepsilon = -\iint_s \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{S} + \oint_l \vec{v}\times\vec{B}\bullet d\vec{l} & (2.44) \\ \varepsilon = \oint_l \vec{E}\bullet d\vec{l} & (2.42)\end{array}\right\} \Rightarrow \oint_l \vec{E}\bullet d\vec{l} = -\iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\bullet d\vec{S} + \oint_l \vec{v}\times\vec{B}\bullet d\vec{l}$$

$$\xrightarrow{\text{斯托克斯定理}} \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla\times(\vec{v}\times\vec{B})$$

$$\xrightarrow{\text{回路静止}} \nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (2.47)$$

法拉第电磁感应定律的微分形式

物理意义：随时间变化的磁场将激发电场。



对法拉第电磁感应定律的讨论

A、等号右边B对t的偏导数，该式用于分析时变场

B、式中的E是磁场随时间变化激发的，称为感应电场

C、感应电场是有旋场，磁场随时间变化处会激发漩涡状的电场

D、对任意回路（不一定有导体）成立

二、全电流定律

1、安培环路定律的局限性

安培环路定律（静磁场）

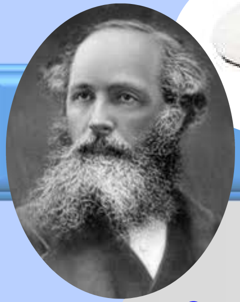
$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}\Rightarrow\nabla\bullet(\nabla\times\vec{H})=\nabla\bullet\vec{J}=0$$

电流连续性方程

$$\nabla\bullet\vec{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$\Rightarrow$ 矛盾！

结论：由静磁场推导出的安培环路定律不能直接用于时变场的分析，必须加以修正。




2、安培环路定律的修正形式（位移电流假说）

$$\nabla\bullet(\nabla\times\vec{H})=\nabla\bullet\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}\xrightarrow{\nabla\bullet\vec{D}=\rho\ (\text{高斯定理})}$$

$$\nabla\bullet(\nabla\times\vec{H})=\nabla\bullet(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t})\rightarrow$$

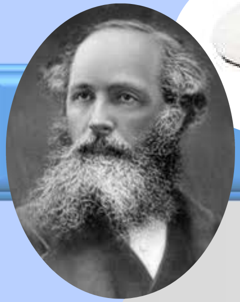
$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

全电流定律的微分形式

其中：J为传导电流，即自由电荷运动形成的电流。

$\vec{J}_d=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$为位移电流，$\vec{J}_{全}=\vec{J}+\vec{J}_d$为全电流

物理意义：随时间变化的电场将激发磁场。



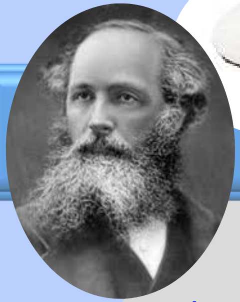
3、对全电流定律和位移电流的讨论

A. 时变场的情况下，磁场仍为有旋场，但漩涡源除了传导电流外，还有位移电流

B. 位移电流代表电场随时间的变化率，当电场发生变化时，会形成形成磁场的漩涡源（位移电流），从而激发磁场

C. 全电流定律的物理意义：随时间变化的电场会激发磁场

D. 位移电流是一种假想电流，由麦克斯韦用数学方法引入，但在此假说的基础上，麦克斯韦预研了电磁波的存在，赫兹用实验证明了电磁波确实存在，从而反过来证明了位移电流理论的正确性。



5.2 麦克斯韦方程组

1、微分形式的麦克斯韦方程组

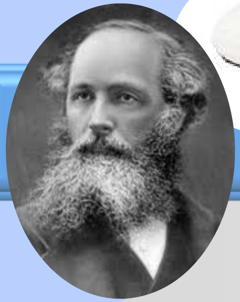
$$\begin{cases} \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} & \text{(电磁感应定律)} \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} & \text{(全电流定律)} \\ \nabla\bullet\vec{B}=0 & \text{(磁通连续性定理)} \\ \nabla\bullet\vec{D}=\rho & \text{(高斯定理)} \end{cases}$$

（1）时变磁场激发时变电场

（2）传导电流和时变电场均激发时变磁场

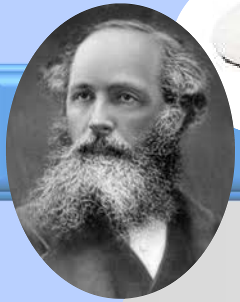
（3）穿过任一封闭面的磁通量恒等于零

（4）穿过任一封闭面的电通量等于封闭面包围的自由电荷量



说明：静场只是时变场的一种特殊情况。

$$
(2.51)\xrightarrow{\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}=0,\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=0}
\begin{cases}
\nabla \times \vec{E} = 0 & (2.51\text{a}') \\
\nabla \times \vec{H} = \vec{J} & (2.51\text{b}') \\
\nabla \bullet \vec{B} = 0 & (2.51\text{c}') \\
\nabla \bullet \vec{D} = \rho & (2.51\text{d}')
\end{cases}
$$



本构关系

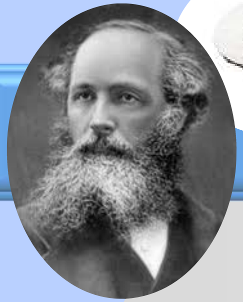
2、在媒质中，场量之间必须满足媒质的本构关系。在线性、均匀和各向同性媒质（简单媒质）中：

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E},\quad \vec{B}=\mu\vec{H},\quad \vec{J}=\sigma\vec{E} \qquad (2.52)$$

ε 称为介电常数，μ 称为导磁率，σ 称为电导率。

真空或自由空间，$\varepsilon=\varepsilon_0$，$\mu=\mu_0$，$\sigma=0$。

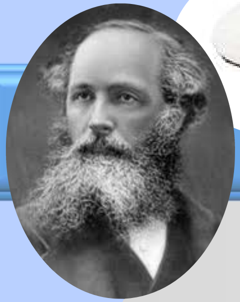
$$\begin{cases} \sigma=0 & \text{理想媒质} \\ \sigma=\infty & \text{理想导体} \\ 0<\sigma<\infty & \text{导电媒质} \end{cases}$$



限定性的麦克斯韦方程组

$$
\begin{cases}
\nabla\times\vec{E}=-\mu\dfrac{\partial\vec{H}}{\partial t} & \text{(2.53a)}\\[2ex]
\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\varepsilon\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} & \text{(2.53b)}\\[2ex]
\nabla\bullet\vec{H}=0 & \text{(2.53c)}\\[2ex]
\nabla\bullet\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon} & \text{(2.53d)}
\end{cases}
$$

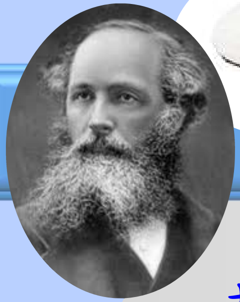
说明：麦克斯韦方程组的限定形式与媒质特性有关



3、积分形式的麦克斯韦方程组

$$
\begin{cases}
\oint_l \vec{E} \bullet d\vec{l} = -\int_s \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{S} & (2.54a) \\
\oint_l \vec{H} \bullet d\vec{l} = \int_s (\vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \bullet d\vec{S} & (2.54b) \\
\oint_l \vec{B} \bullet d\vec{S} = 0 & (2.54c) \\
\oint_l \vec{D} \bullet d\vec{S} = \int_V \rho dV & (2.54d)
\end{cases}
$$

说明：利用积分形式的麦克斯韦方程组可导出不同媒质交界面处电磁场的边界条件。



麦克斯韦方程组揭示的物理含义

A、时变电场的激发源除电荷以外，还有变化的磁场；时变磁场的激发源除传导电流外，还有变化的电场

B、电场和磁场互为激发源，互相激发

C、电场和磁场不再相互独立，而是相互关联，构成一个统一的整体—电磁场，电场和磁场分别为电磁场的两个物理量

D、麦克斯韦方程组预言了电磁波的存在，且已被事实所证实

5.3 时变电磁场的边界条件

A、麦克斯韦方程组可以应用任何连续的介质内部

B、在两种介质界面上，介质性质有突变，电磁场也会突变

C、分界面两边电磁场按照某种规律突变，称这种突变关系为电磁场的边界条件或边值条件

D、推导边界条件的依据为麦克斯韦方程组的积分形式

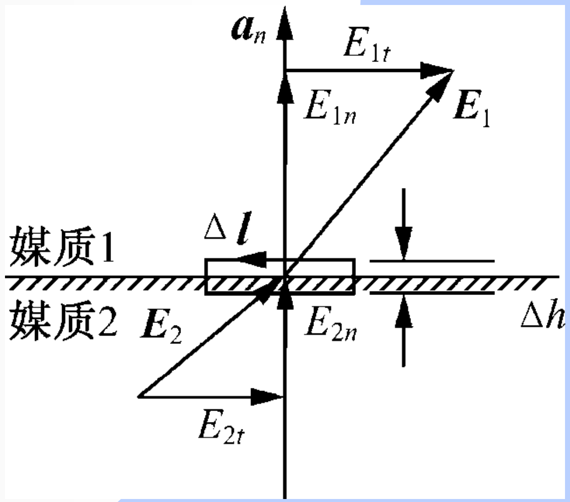
（1）电场强度的边界条件

$$\oint_l \vec{E} \bullet d\vec{l} = \vec{E}_1 \bullet \Delta\vec{l} - \vec{E}_2 \bullet \Delta\vec{l}$$

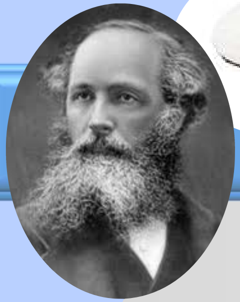
$$= E_{1t}\Delta l - E_{2t}\Delta l = -\int_{\Delta s} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{S} = 0 \quad (2.52)$$

$$\lim_{\Delta s \to 0} \int_{\Delta s} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \bullet d\vec{S} = 0$$

$$\overline{a}_n \times (\overline{E}_1 - \overline{E}_2) = 0 \text{或} E_{1t} = E_{2t} \qquad (2.53)$$



结论：电场强度在不同媒质分界面两侧切向分量连续



(2) 磁场强度的边界条件

$$\oint_l \vec{H}\bullet d\vec{l} = H_{1t}\Delta l - H_{2t}\Delta l = i + \int_{\Delta s}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\bullet d\vec{S} = J_s\Delta l \quad (2.57)$$

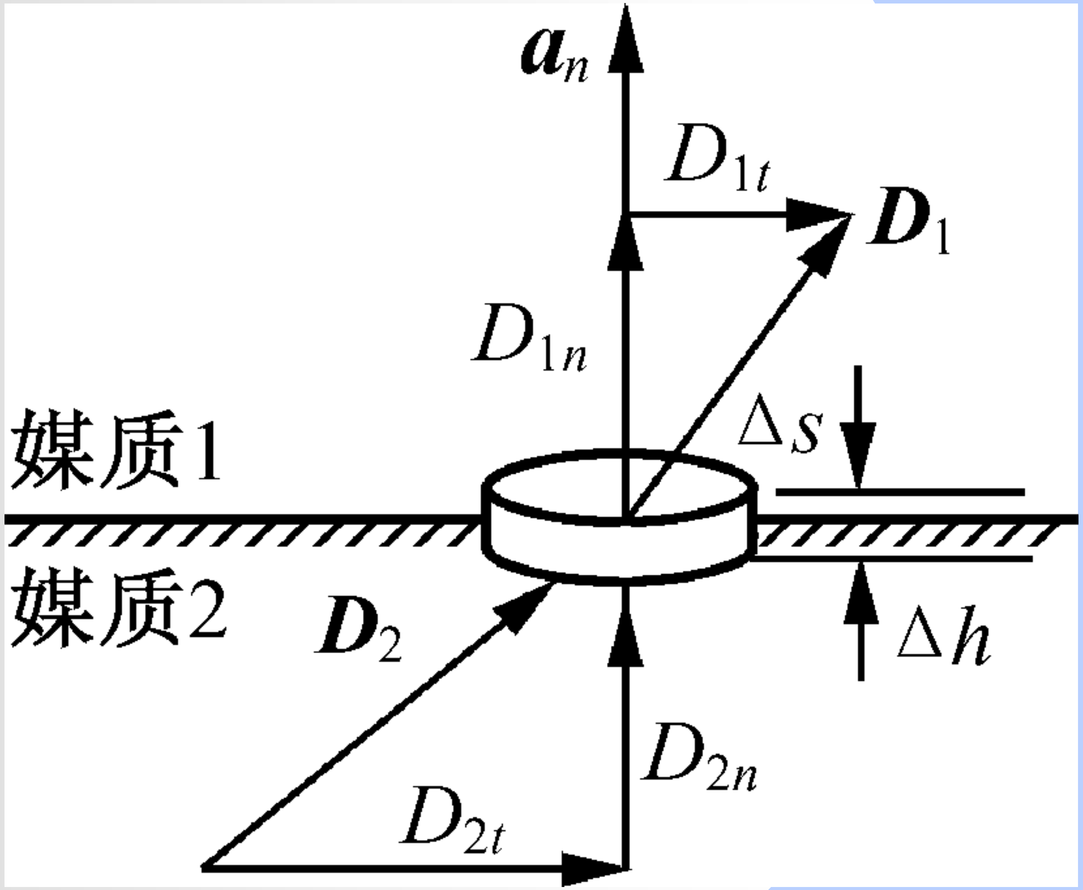
$$\lim_{\Delta s\to 0}\int_{\Delta s}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\bullet d\vec{S} = 0$$

$$\vec{a}_n\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\vec{J}_S \text{ 或 } H_{1t}-H_{2t}=J_S \quad (2.58)$$

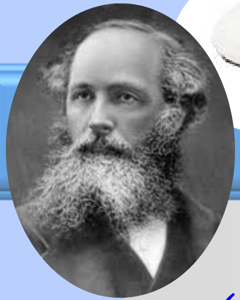
式中$\vec{a}_n$为媒质 2－>1的法向

$\vec{J}_S$为表面传导电流密度

结论：磁场强度在不同媒质分界面两侧的切向分量不连续，其差值恰好等于分界面上的电流面密度。



$\boldsymbol{a}_n$
D_{1t}
$\boldsymbol{D}_1$
D_{1n}
Δs
媒质1
媒质2
$\boldsymbol{D}_2$
Δh
D_{2n}
D_{2t}



（3）电通密度的边界条件

$$\oint_l \vec{D}\bullet d\vec{S}=\vec{D}_1\bullet\vec{a}_n\Delta S-\vec{D}_2\bullet\vec{a}_n\Delta S=(D_{1n}\text{-}D_{2n})\Delta S=\Delta Q$$

$$(\vec{D}_1-\vec{D}_2)\bullet\vec{a}_n=\rho_s \quad \text{或} \quad D_{1n}-D_{2n}=\rho_s \qquad (2.59)$$

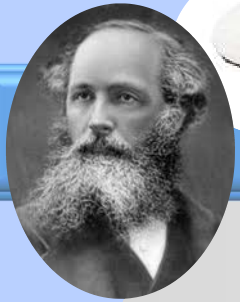
结论：电通密度在不同媒质分界面两侧的法向分量不连续，其差值恰好等于分界面上自由电荷面密度。

（4）磁通密度的边界条件

$$\oint_l \vec{B}\bullet d\vec{S}=\vec{B}_1\bullet\vec{a}_n\Delta S-\vec{B}_2\bullet\vec{a}_n\Delta S=(B_{1n}-B_{2n})\Delta S=0$$

$$(\vec{B}_1-\vec{B}_2)\bullet\vec{a}_n=0 \quad \text{或} \quad B_{1n}=B_{2n} \qquad (2.60)$$

结论：磁通密度在不同媒质分界面两侧法向分量连续




时变电磁场的边界条件

$$\vec{a}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \qquad (2.56)$$

$$\vec{a}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S \qquad (2.58)$$

$$\vec{a}_n \bullet (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_S \qquad (2.59)$$

$$\vec{a}_n \bullet (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \qquad (2.60)$$

结论：在分界面处，电场强度的切向分量连续；磁场强度的切向分量不连续，其差值等于该点处的面电流密度；在分界面处任意点电通量密度的法向分量不连续，其差值等于该点处的面电荷密度，磁通量密度的法向分量连续。

注意:(1)理想导体内部时变电磁场为0，理想导体表面上面电流密度和面电荷密度可以存在。（2）两种理想电介质交界面处面电流密度为0，当交界面处没有放置附加电荷时，面电荷密度也为0。


两种特殊的边界

A、两种理想介质的边界

在理想介质的内部和表面上，不存在自由电荷和传导电流。

$$\begin{cases} E_{1t}=E_{2t} \\ H_{1t}=H_{2t} \\ D_{1n}=D_{2n} \\ B_{1n}=B_{2n} \end{cases} \text{或} \begin{cases} \vec{a}_n\times(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=0 \\ \vec{a}_n\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=0 \\ \vec{a}_n\bullet(\vec{D}_1-\vec{D}_2)=0 \\ \vec{a}_n\bullet(\vec{B}_1-\vec{B}_2)=0 \end{cases} \qquad (2.61)$$

结论：在理想介质分界面上，$\vec{E},\vec{H}$切向连续

在理想介质分界面上，$\vec{B},\vec{D}$法向连续

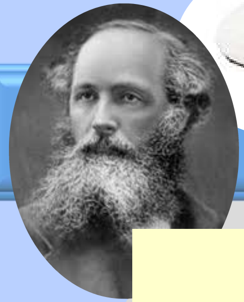
两种特殊的边界

B、理想介质与理想导体的边界

理想导体内电场强度和磁场强度均为0;表面上一般存在自由电荷和传导电流

$$\begin{cases} E_{1t}=0 \\ H_{1t}=J_s \\ D_{1n}=\rho_s \\ B_{1n}=0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} \overrightarrow{a_n}\times\overrightarrow{E_1}=0 \\ \overrightarrow{a_n}\times\overrightarrow{H_1}=\overrightarrow{J_s} \\ \overrightarrow{a_n}\bullet\overrightarrow{D_1}=\rho_s \\ \overrightarrow{a_n}\bullet\overrightarrow{B_1}=0 \end{cases} \qquad (2.62)$$

注意： 理想导体和理想介质只是理论上存在。在实际中，某些媒质的电导率极大或极小，即可以视为理想导体或理想介质进行处理。



5.4 坡印亭定理和坡印亭矢量

能量守恒定律是一切物质运动过程遵守的普遍定律，作为特殊形态的物质，电磁场及其运动也遵守这一普遍定律。本节将详细讨论电磁场的能量和能量守恒定律，引入重要的坡印亭矢量和坡印亭定理，分析讨论电磁场能量、电荷电流运动及电磁场做功之间的相互关系。

1、场与电荷系统的能量转化和守恒定律的一般形式

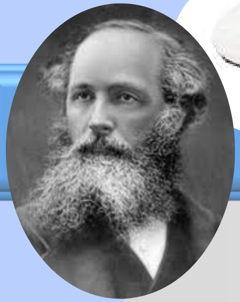
举例：天线辐射电磁波

引入两个物理量描述电磁场的能量

(1) 场的能量密度ω，它是场内单位体积内的能量，是空间位置$\bar{r}$和时间的函数，$\omega=\omega(\bar{r},t)$。

(2) 场的能流密度$\bar{S}$，它描述能量在场内的传播。$\bar{S}$在数值上等于单位时间内垂直流过单位横截面的能量，其方向代表能量传输的方向。

场与电荷相互作用时，能量就在场与电荷系统之间转移。



设区域V，界面S，体电荷密度ρ，体电流密度$\bar{J}$。能量守恒定律要求单位时间通过界面S进入体积V内的能量等于场对V电荷做功的功率与V对电磁场能量增加速率之和。

$\bar{f}$表示场对电荷作用力密度,$\vec{v}$表示电荷运动速度，场对电荷系统所做的功率为：$\int_V \vec{f} \bullet \vec{v} dV$

V内场的能量增加率为：$\frac{d}{dt}\int_V \omega dV$

通过界面S流入V内的能量为$-\oint_\Sigma \vec{S} \bullet d\sigma$

$$-\oint_\Sigma \vec{S} \bullet d\sigma = \int_V \vec{f} \bullet \vec{v} dV + \frac{d}{dt}\int_V \omega dV \qquad \text{(A.1)}$$

$$-\nabla \bullet \vec{S} = \vec{f} \bullet \vec{v} + \frac{\partial \omega}{\partial t} \qquad \text{(A.2)}$$

电磁场能量密度与能流密度的表达式

根据场与电荷相互作用的规律——麦克斯韦方程组和洛伦兹力求出电磁场的能量密度和能流密度的表达式

洛伦兹力公式 $\vec{f} = \rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B}$

$$\vec{f} \bullet \vec{v} = (\rho\vec{E} + \rho\vec{v} \times \vec{B}) \bullet \vec{v} = \rho\vec{E} \bullet \vec{v} = \vec{J} \bullet \vec{E} \qquad \text{(A.3)}$$

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{J} \bullet \vec{E} = \vec{E} \bullet (\nabla \times \vec{H}) - \vec{E} \bullet \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \text{(A.4)}$$

$$\vec{E} \bullet (\nabla \times \vec{H}) = -\nabla \bullet (\vec{E} \times \vec{H}) + \vec{H} \bullet (\nabla \times \vec{E}) = -\nabla \bullet (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \bullet \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(A.5)}$$

$$\vec{f} \bullet \vec{v} = \vec{J} \bullet \vec{E} = -\nabla \bullet (\vec{E} \times \vec{H}) - \vec{H} \bullet \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \bullet \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \text{(A.6)}$$

对简单煤质，

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{H}\bullet\vec{B}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{H}\bullet\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{B}\bullet\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)=\vec{H}\bullet\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{E}\bullet\vec{D}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{E}\bullet\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{D}\bullet\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=\vec{E}\bullet\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

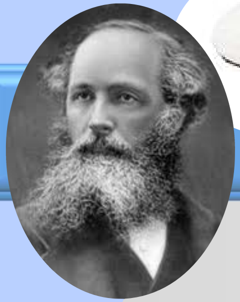
所以（A.6）可以写为

$$\vec{f}\bullet\vec{v}=\vec{J}\bullet\vec{E}=-\nabla\bullet(\vec{E}\times\vec{H})-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{H}\bullet\vec{B}}{2}+\frac{\vec{E}\bullet\vec{D}}{2}\right) \qquad \text{(A.7)}$$

$$-\nabla\bullet(\vec{E}\times\vec{H})=\vec{f}\bullet\vec{v}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{H}\bullet\vec{B}}{2}+\frac{\vec{E}\bullet\vec{D}}{2}\right) \qquad \text{(A.8)}$$

同（A.2）比较可得

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H},\ \omega=\frac{\vec{H}\bullet\vec{B}}{2}+\frac{\vec{E}\bullet\vec{D}}{2}$$



电场能量密度

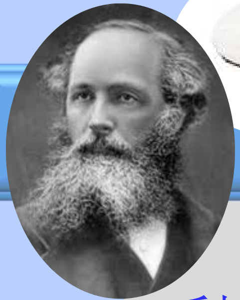
$$\omega_e = \frac{1}{2}\vec{D}(\vec{r}) \bullet \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\varepsilon\left|\vec{E}(\vec{r})\right|^2$$

磁场能量密度

$$\omega_m = \frac{1}{2}\vec{B}(\vec{r}) \bullet \vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\mu\left|\vec{H}(\vec{r})\right|^2$$

电磁场能量密度

$$\begin{aligned}\omega = \omega_e + \omega_m &= \frac{1}{2}\vec{D}(\vec{r}) \bullet \vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{2}\vec{B}(\vec{r}) \bullet \vec{H}(\vec{r}) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon\left|\vec{E}(\vec{r})\right|^2 + \frac{1}{2\mu}\left|\vec{B}(\vec{r})\right|^2\end{aligned}$$




1坡印亭定理

利用场论恒等式

$$\nabla\bullet(\vec{E}\times\vec{H})=\vec{H}\bullet(\nabla\times\vec{E})-\vec{E}\bullet(\nabla\times\vec{H})$$

$$-\nabla\bullet(\vec{E}\times\vec{H})=\vec{H}\bullet\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{E}\bullet\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{E}\bullet\vec{J} \qquad (2.90)$$

微分形式的坡印亭定理

将（2.63）两端封闭面S所包围的体积V做体积分，并利用散度定理得

$$-\int_S(\vec{E}\times\vec{H})\bullet d\vec{S}=\int_V(\vec{H}\bullet\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{E}\bullet\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{E}\bullet\vec{J})dV \qquad (2.91)$$

积分形式的坡印亭定理

对简单媒质（线性，均匀，各向同性），$\vec{B}=\mu\vec{H},\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$　且

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{H}\bullet\vec{B}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{H}\bullet\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{B}\bullet\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\right)=\vec{H}\bullet\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{E}\bullet\vec{D}}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\vec{E}\bullet\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{D}\bullet\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=\vec{E}\bullet\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

式（2.91）可改写为

$$-\int_S(\vec{E}\times\vec{H})\bullet d\vec{S}=\int_V\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\vec{H}\bullet\vec{B}}{2}+\frac{\vec{E}\bullet\vec{D}}{2}\right)dV+\int_V\vec{E}\bullet\vec{J}dV$$

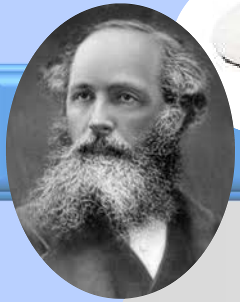
$$=\frac{d}{dt}\int_V\left(\frac{1}{2}\mu H^2+\frac{1}{2}\varepsilon E^2\right)dV+\int_V\sigma E^2dV=\frac{d}{dt}\int_V(\omega_m+\omega_e)dV+\int_V p_\sigma dV \qquad (2.93)$$

注意：体积V中电磁场能量随时间的增加率与热损耗功率之和等于单位时间内穿过封闭面积S进入体积V的能量。

$\omega_m=\dfrac{\vec{H}\bullet\vec{B}}{2}=\dfrac{1}{2}\mu H^2$　瞬时磁场能量密度（J/m^3）

$\omega_e=\dfrac{\vec{E}\bullet\vec{D}}{2}=\dfrac{1}{2}\varepsilon E^2$　瞬时电场能量密度（J/m^3）

$p_\sigma=\vec{E}\bullet\vec{J}=\sigma E^2$　表示传导电流引起的热损耗瞬时功率密度（W/m^3）




2. 坡印亭矢量

对静态场，（2.93）变为

$$-\oint_S (\vec{E}\times\vec{H})\bullet d\vec{S} = \int_V \sigma E^2 dV \qquad (2.94)$$

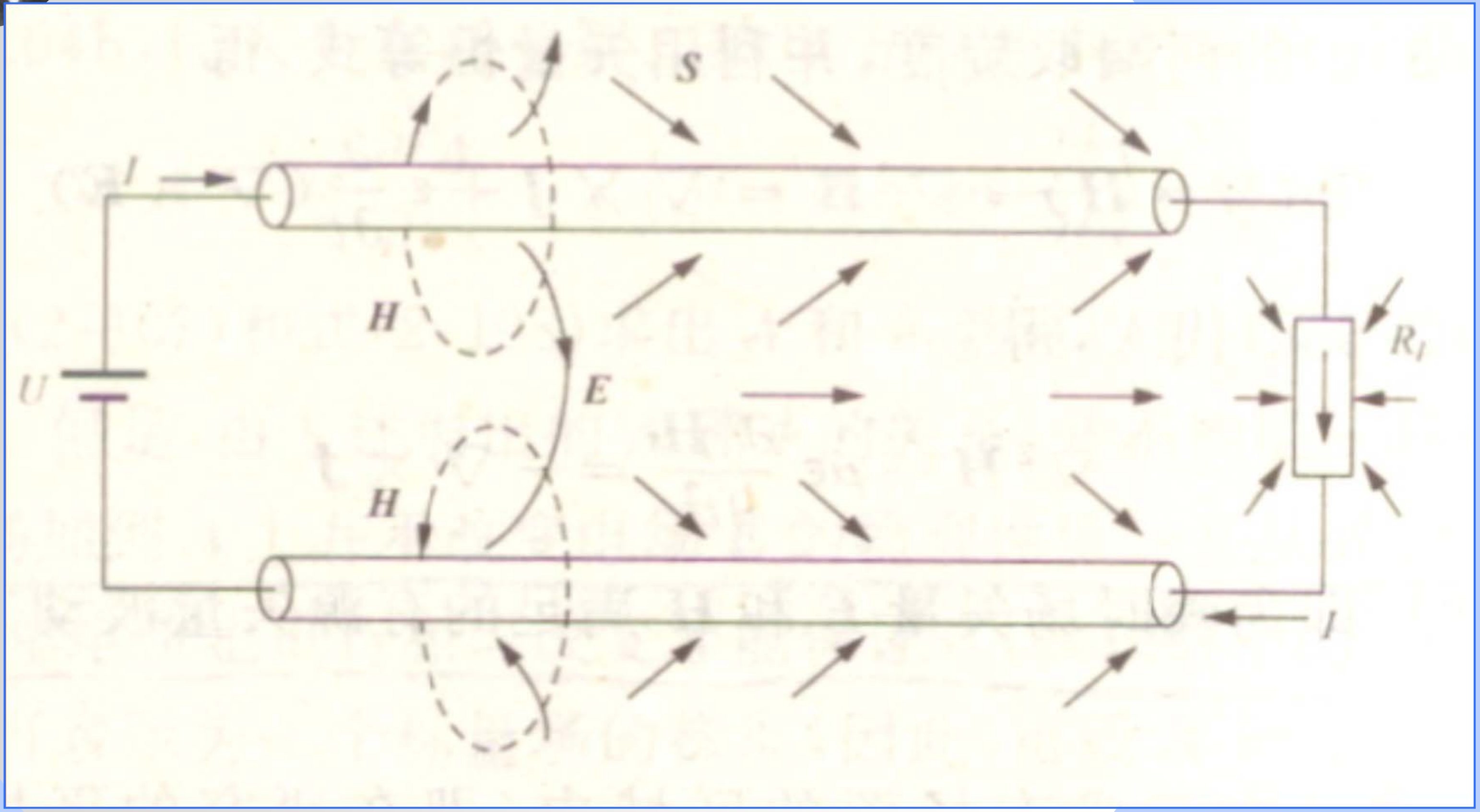
矢量积 $\vec{E}\times\vec{H}$ 具有功率密度量纲，定义坡印亭矢量

$$\vec{S}(t) = \vec{E}(t)\times\vec{H}(t) \qquad （2.95）$$

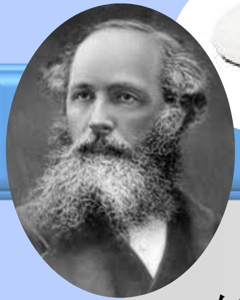
表示单位面积的瞬时功率流，单位 W/m^2。$\vec{S}(t)$ 的方向是功率流的方向，$\vec{S}(t)$ 与 $\vec{E}(t)$ 和 $\vec{H}(t)$ 满足右手螺旋关系

当 $\vec{E}(t)$ 和 $\vec{H}(t)$ 都是时间的周期函数时，定义时间平均的功率流密度矢量为

$$\vec{S}_{av} = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{E}(t)\times\vec{H}(t)\, dt \qquad （2.96）$$



有耗平行双导线周围空间中的电磁场和坡印亭矢量的分布



例2.3　已知一根长为l，半径为b，电导率为σ的实心导体沿其轴向（z向）载有均匀分布的直流电流I。求导体表面处的坡印亭矢量，并验证坡印亭定理。

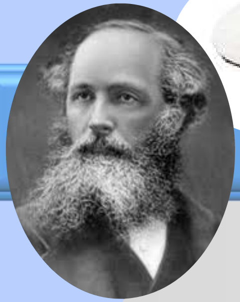
解：① 因实心导体的截面为πb^2，故导体表面的电场强度$\vec{E}$和磁场强度$\vec{H}$在圆柱坐标系中的表达式分别为

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = \vec{a}_z \frac{I}{\sigma \pi b^2} \quad , \quad \vec{H} = \vec{a}_\varphi \frac{I}{2\pi b}$$

于是，导体表面处的坡印亭矢量为

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = -\vec{a}_r \frac{I^2}{2\sigma \pi^2 b^3}$$

它的方向垂直于导体表面，沿径向指向导体内部。



② 为验证坡印亭定理，将 $\vec{S}$ 沿长度为 l 的圆柱表面作面积分，得

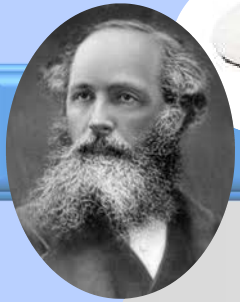
$$-\oint_s \vec{S}\bullet \mathrm{d}\vec{s} = -\oint_s \vec{S}\bullet \vec{a}_r\,\mathrm{d}s = \oint_{s_s} \frac{I^2}{2\sigma\pi^2 b^3}\mathrm{d}s = \frac{2\pi b l I^2}{2\sigma\pi^2 b^3} = I^2\left(\frac{l}{\sigma\pi b^2}\right) = I^2 R$$

其中 s_s 代表圆柱的侧面，$R = l/(\sigma\pi b^2)$ 。

又因实心导体内的热损耗功率为

$$\int_v p_\sigma dv = \int_v \sigma E^2 dv = \int_v \frac{J^2}{\sigma} dv = \frac{\pi b^2 l I^2}{\sigma\pi^2 b^4} = I^2 \frac{l}{\sigma\pi b^2} = I^2 R$$

可见，流入实心导体表面的电磁功率正好等于导体内部的热损耗功率。



5.5 波动方程与电磁位函数

波动方程

设电磁波处于稳定的理想简单媒质（即媒质的 μ，ε 与 t，r 无关 $\sigma=0$）中推导出瞬时常矢量 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 满足的矢量波动方程。

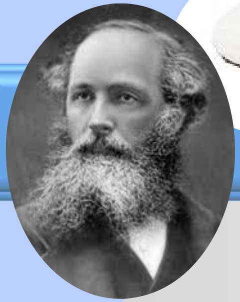
$$\nabla\times\vec{E}=-\mu\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}\Rightarrow\left.\begin{aligned}&\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=-\mu\frac{\partial(\nabla\times\vec{H})}{\partial t}\\&\nabla\times(\nabla\times\vec{E})=\nabla(\nabla\bullet\vec{E})-\nabla^2\vec{E}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}&\nabla(\nabla\bullet\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\mu\frac{\partial(\nabla\times\vec{H})}{\partial t}\\&\Rightarrow\nabla\bullet\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}\\&\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}+\frac{\nabla\rho}{\varepsilon}\qquad(2.100)$$

非齐次矢量波动方程

采用类似的计算过程，可得

$$\nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=-\nabla\times\vec{J}\qquad(2.101)$$



若电磁波存在于没有场源的区域内（ $\vec{J}$=0, σ=0 ），则

$$\nabla^2\vec{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=0 \qquad (2.102)$$

$$\nabla^2\vec{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2}=0 \qquad (2.103)$$

齐次矢量波动方程

2. 电磁位函数及其方程

由于场矢量 E和H与场源间的关系相当复杂，通过

齐次矢量波动方程的求解变为较简单的位函数的求解

矢量 E和H。

由姆霍兹定理，要唯一地确定一个矢量场，必须定义其散度和旋度。必须定义A的散度，A的散度可随意选取，此附加条件称为规范条件。

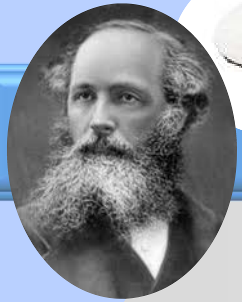
$$\left.\begin{array}{l}\nabla\bullet\vec{B}=0\\ \nabla\bullet(\nabla\times\vec{A})=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$ 令 $\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$ ， 称 $\vec{A}$ 为矢量磁位

对简单媒质 $\vec{H}=\frac{1}{\mu}(\nabla\times\vec{A})$ $\quad \nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=-\frac{\partial(\nabla\times\vec{A})}{\partial t}=-\nabla\times\frac{\quad}{\partial t}$

$$\left.\begin{array}{l}\nabla\times(\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})=0\\ \nabla\times(\nabla\phi)=0\end{array}\right\}\Rightarrow$$ 令 $\vec{E}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}=-\nabla\phi,\ \vec{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ 称ϕ 为标量电位

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\ \nabla\times\nabla\times\vec{A}=\mu\vec{J}+\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}(-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t})$$ 化简得

$$\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}+\nabla(\nabla\bullet\vec{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t})$$



洛仑兹规范和库仑规范

洛仑兹规范 $\nabla\bullet\vec{A}=-\mu\varepsilon\dfrac{\partial\phi}{\partial t}$ 则

$$\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J} \qquad (2.112)$$

非齐次矢量波动方程

$$\left.\begin{aligned}\nabla\bullet\vec{E}&=\frac{\rho}{\varepsilon}\\ \vec{E}&=-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left.\begin{aligned}\nabla^2\phi+\frac{\partial\nabla\bullet\vec{A}}{\partial t}&=-\frac{\rho}{\varepsilon}\\ \nabla\bullet\vec{A}&=-\mu\varepsilon\frac{\partial\phi}{\partial t}\end{aligned}\right\}=\nabla^2\phi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (2.113)$$

非齐次标量波动方程

库伦规范

$$\nabla\bullet\vec{A}=0$$

$$\nabla^2\vec{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=-\mu\vec{J}+\mu\varepsilon\frac{\partial\nabla\phi}{\partial t};\quad \nabla^2\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon}$$


5.6 时谐电磁场的复数表示

时谐电磁场：瞬时场矢量的每一个坐标分量都以单一频率随时间作余弦变化。

设直角坐标系中时谐电磁场的电场强度瞬时矢量为

$$\vec{E}(t)=\vec{a}_x E_x(t)+\vec{a}_y E_y(t)+\vec{a}_z E_z(t)$$

$$=\vec{a}_x E_{x0}\cos(\omega t+\varphi_x)+\vec{a}_y E_{y0}\cos(\omega t+\varphi_y)+\vec{a}_z E_{z0}\cos(\omega t+\varphi_z)$$

定义复振幅

$$E_i(t)=\mathrm{Re}[E_{i0}e^{j\varphi_i}e^{j\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{E}_{i0}\,e^{j\omega t}], i=x,y,z$$

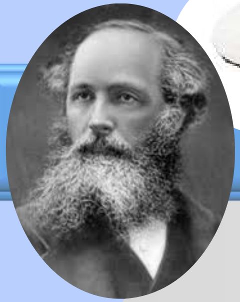
$$\vec{E}(t)=\mathrm{Re}\{[\vec{a}_x\dot{E}_x+\vec{a}_y\dot{E}_y+\vec{a}_z\dot{E}_z]e^{j\omega t}\}=\mathrm{Re}[\dot{E}\,e^{j\omega t}] \qquad (2.140)$$

$$\dot{\vec{E}}=\vec{a}_x\dot{E}_x+\vec{a}_y\dot{E}_y+\vec{a}_z\dot{E}_z$$

电场强度复矢量

$$\frac{\partial^n\vec{E}(t)}{\partial t^n}=\mathrm{Re}[(j\omega)^n\dot{\vec{E}}\,e^{j\omega t}],$$

$\vec{E}(t)$对时间的微分运算可化为对复矢量 $\dot{E}$ 的代数运算



1 复数形式的麦氏方程组

$$\nabla\times\vec{E}(t)=-\frac{\partial\vec{B}(t)}{\partial t}\Rightarrow$$

$$\nabla\times\mathrm{Re}[\dot{E}\,e^{j\omega t}]=-\mathrm{Re}[j\,\omega\dot{B}\,e^{j\omega t}]\;\Rightarrow$$

$$\nabla\times\dot{E}=-j\,\omega\dot{B}$$

复数形式的非限定性的麦克斯韦方程组

$$\nabla\times\dot{E}=-j\,\omega\dot{B}\qquad(2.141a)$$

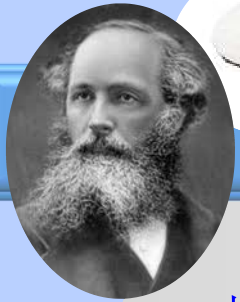
$$\nabla\times\dot{H}=\dot{J}+j\omega\dot{D}\qquad(2.141b)$$

$$\nabla\bullet\dot{B}=0\qquad(2.141c)$$

$$\nabla\bullet\dot{D}=\dot{\rho}\qquad(2.141d)$$

复数形式的电流连续性方程

$$\nabla\bullet\dot{J}=-j\omega\dot{\rho}$$



电磁场复矢量间满足的本构关系

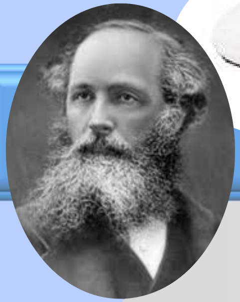
$$\dot{D}=\varepsilon\dot{E} \qquad \dot{B}=\mu\dot{H} \qquad \dot{J}=\sigma\dot{E}$$

复数形式的限定性的麦克斯韦方程组为

$$\nabla\times\dot{E}=-j\mu\omega\dot{H} \qquad (2.144a) \qquad \nabla\times\dot{H}=\dot{J}+j\omega\varepsilon\dot{E} \qquad (2.144b)$$

$$\nabla\bullet\dot{H}=0 \qquad (2.144c) \qquad \nabla\bullet\dot{E}=\frac{\dot{\rho}}{\varepsilon} \qquad (2.144d)$$

为书写方便，将复矢量及复数符号上的小圆点“•”略去，根据表达式中有无j 或w来判断关系式是否是复数形式



2 复数形式的边界条件

在两种媒质的交界面上，用复数表示的边界条件为

$$\vec{a}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \qquad (2.145a)$$

$$\vec{a}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \qquad (2.145b)$$

$$\vec{a}_n \bullet (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \qquad (2.145c)$$

$$\vec{a}_n \bullet (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_s \qquad (2.145d)$$


3. 矢量亥姆霍兹方程

非齐次矢量赫姆霍兹方程

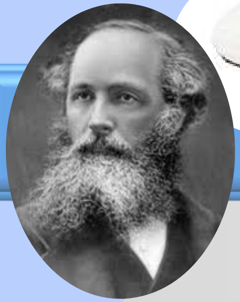
$$\nabla\times\nabla\times\vec{E}-k^{2}\vec{E}=-j\omega\mu\vec{J}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{H}-k^{2}\vec{H}=\nabla\times\vec{J}$$

其中 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=\omega/v$ ，称为电磁波的波数

$$\nabla^{2}\vec{E}+k^{2}\vec{E}=j\omega\mu\vec{J}+\frac{\nabla\rho}{\varepsilon}\quad(2.146a)$$

$$\nabla^{2}\vec{H}+k^{2}\vec{H}=-\nabla\times\vec{J}\quad(2.146b)$$




4. 复坡印亭矢量和复坡印亭定理

把 $\vec{E}(t)=\mathrm{Re}[\vec{E}e^{j\omega t}]=\frac{1}{2}[\vec{E}e^{j\omega t}+\vec{E}^{*}e^{-j\omega t}]$

$$\vec{H}(t)=\mathrm{Re}[\vec{H}e^{j\omega t}]=\frac{1}{2}[\vec{H}e^{j\omega t}+\vec{H}^{*}e^{-j\omega t}]$$

代入（2.96）得

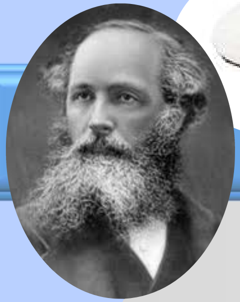
$$S_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T[\vec{E}(t)\times\vec{H}(t)]dt$$

$$=\frac{1}{4T}[\int_0^T(\vec{E}\times\vec{H})e^{j2\omega t}dt+\int_0^T(\vec{E}^{*}\times\vec{H}^{*})e^{-j2\omega t}dt+\int_0^T(\vec{E}\times\vec{H}^{*}+\vec{E}^{*}\times\vec{H})dt]$$

$$=\frac{1}{4}(\vec{E}\times\vec{H}^{*}+\vec{E}^{*}\times\vec{H})=\frac{1}{2}\{\frac{1}{2}[(\vec{E}\times\vec{H}^{*})+(\vec{E}\times\vec{H}^{*})^{*}]\}=\mathrm{Re}[\frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H}^{*})]$$

$$=\mathrm{Re}\{\vec{S}\}$$

$\vec{S}=\frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H}^{*})$ 为复坡印亭矢量，代表复功率密度



$$(\omega_e)_{av}=\frac{1}{T}\int_0^T \omega_e(t)dt$$ 式中

$$\omega_e(t)=\frac{1}{2}\vec{D}(t)\bullet\vec{E}(t)=\frac{1}{2}\{\frac{1}{4}[\vec{D}e^{j\omega t}+\vec{D}^*e^{-j\omega t}]\bullet[\vec{E}e^{j\omega t}+\vec{E}^*e^{-j\omega t}]\}$$

$\omega_e=\frac{1}{2}\vec{E}\bullet\vec{D}^*$ 复电场能量密度，$\omega_m=\frac{1}{2}\vec{H}\bullet\vec{B}^*$ 复磁场能量密度

$$(\omega_e)_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\omega_e]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\frac{1}{2}\vec{E}\bullet\vec{D}^*]=\frac{1}{4}\varepsilon E^2$$

$$(\omega_m)_{av}=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\omega_m]=\frac{1}{2}\mathrm{Re}[\frac{1}{2}\vec{H}\bullet\vec{B}^*]=\frac{1}{4}\mu H^2$$

对于简单媒质，对复坡印亭矢量取散度，得

$$\nabla\times\vec{E}=-j\omega\mu\vec{H}$$

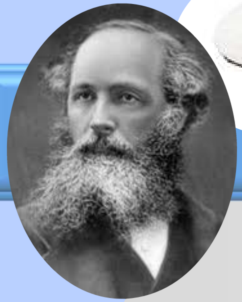
$$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+j\omega\varepsilon\vec{E}$$

$$\nabla\bullet(\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*)=\frac{1}{2}\vec{H}^*\bullet(\nabla\times\vec{E})-\frac{1}{2}\vec{E}\bullet(\nabla\times\vec{H}^*)$$

化简得 $$-\nabla\bullet(\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*)=j2\omega(\frac{1}{4}\mu H^2-\frac{1}{4}\varepsilon E^2)+\frac{1}{2}\vec{E}\bullet\vec{J}^*$$

对上式两端进行体积分，并对左端应用散度定理，得

$$-\oint_S(\frac{1}{2}\vec{E}\times\vec{H}^*)\bullet d\vec{S}=j2\omega\int_V(\frac{1}{4}\mu H^2-\frac{1}{4}\varepsilon E^2)dV+\frac{1}{2}\int_V\sigma E^2dV$$



【例题 2—5】在自由空间中，有一工作频率为100MHZ的时谐电磁场，其电场强度复矢量表达式为

$$\vec{E}=\vec{a}_x 0.12\pi e^{j[\frac{\pi}{3}(x+\sqrt{3}y)-\frac{\pi}{4}]}-\vec{a}_z 0.24\pi e^{j[\frac{\pi}{3}(x+\sqrt{3}y)-\frac{\pi}{3}]}\ V/m$$

求（1）电场强度的瞬时表达式　（2）磁场强度的瞬时表达式

（3）平均能流密度矢量　　　（4）平均电磁场能量密度

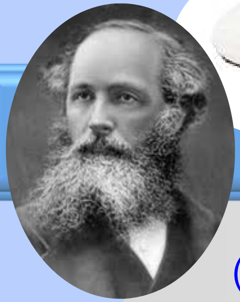
解：(1) 由 $\vec{E}(t)=\mathrm{Re}[\vec{E}e^{jwt}]$ 得

$$\vec{E}(t)=\mathrm{Re}[\{\vec{a}_x 0.12\pi e^{j[\frac{\pi}{3}(x+\sqrt{3}y)-\frac{\pi}{4}]}-\vec{a}_z 0.24\pi e^{j[\frac{\pi}{3}(x+\sqrt{3}y)-\frac{\pi}{3}]}\}e^{jwt}]$$

$$=\vec{a}_x 0.12\pi\cos[2\times10^8\pi t+\frac{\pi}{3}(x+\sqrt{3}y)-\frac{\pi}{4}]$$

$$-\vec{a}_z 0.24\pi\cos[2\times10^8\pi t+\frac{\pi}{3}(x+\sqrt{3}y)-\frac{\pi}{3}]$$

$$=\vec{a}_x\vec{E}_x(t)+\vec{a}_y\vec{E}_y(t)$$




（2）由 $\nabla\times\vec{E}=-jw\mu_0\vec{H}$ 并在直角坐标系下展开，可以得到磁场强度复矢量为

$$\vec{H}=\frac{j}{w\mu_0}(\nabla\times\vec{E})=\frac{j}{2\times10^{8}\pi\times4\pi\times10^{-7}}\begin{pmatrix}\vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \vec{E}_x & 0 & \vec{E}_z\end{pmatrix}$$

$$=10^{-3}\{\vec{a}_x\sqrt{3}e^{j[\frac{\pi}{3}(x+\sqrt{3}y)-\frac{\pi}{3}]}-\vec{a}_y e^{j[\frac{\pi}{3}(x+\sqrt{3}y)-\frac{\pi}{3}]}+\vec{a}_z\frac{\sqrt{3}}{2}e^{j[\frac{\pi}{3}(x+\sqrt{3}y)-\frac{\pi}{4}]}\}$$

$$=\vec{a}_x\vec{H}_x+\vec{a}_y\vec{H}_y+\vec{a}_z\vec{H}_z \qquad A/m$$

所以磁场强度瞬时矢量为

$$\vec{H}(t)=\mathrm{Re}[\{\vec{a}_x\sqrt{3}e^{j[\frac{\pi}{3}(x+\sqrt{3}y)-\frac{\pi}{3}]}-\vec{a}_y e^{j[\frac{\pi}{3}(x+\sqrt{3}y)-\frac{\pi}{3}]}+\vec{a}_z\frac{\sqrt{3}}{2}\pi e^{j[\frac{\pi}{3}(x+\sqrt{3}y)-\frac{\pi}{4}]}\}e^{jwt}]$$

$$=\vec{a}_x\sqrt{3}\cos[2\times10^{8}\pi t+\frac{\pi}{3}(x+\sqrt{3}y)-\frac{\pi}{3}]-\vec{a}_y\cos[2\times10^{8}\pi t+\frac{\pi}{3}(x+\sqrt{3}y)-\frac{\pi}{3}]$$

$$+\vec{a}_z\frac{\sqrt{3}}{2}\cos[2\times10^{8}\pi t+\frac{\pi}{3}(x+\sqrt{3}y)-\frac{\pi}{4}] \qquad mA/m$$


(3) 由于复坡印亭矢量为

$$\vec{S}=\frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H}^*)=\frac{1}{2}[\vec{a}_x(-\vec{E}_z\vec{H}_y^*)+\vec{a}_y(\vec{E}_z\vec{H}_x^*-\vec{E}_x\vec{H}_z^*)+\vec{a}_z(\vec{E}_x\vec{H}_y^*)]$$

$$=-0.19\times(2\vec{a}_x+\vec{a}_y\frac{5\sqrt{3}}{2}+\vec{a}_z e^{j\frac{\pi}{12}})\qquad \mu W/m^2$$

所以平均能流密度矢量为

$$\vec{S}_{av}=\mathrm{Re}[\vec{S}]=-0.19\times(2\vec{a}_x+\vec{a}_y\frac{5\sqrt{3}}{2}+\vec{a}_z\cos 15^\circ)$$

$$=-0.19\times(2\vec{a}_x+\vec{a}_y 4.33+\vec{a}_z 0.97)\ \ \mu\mathrm{W/m^2}$$

(4) 平均电磁场能量密度为

$$w_{av}=(w_e)_{av}+(w_m)_{av}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}(|E_x|^2+|E_z|^2)$$

$$=\frac{1}{72\pi}\times10^{-9}[(0.12\pi)^2+(0.24\pi)^2]=3.14\times10^{-12}\ \mathrm{J/m^2}$$

【例题 2—6】位于z=0和z=b处的两无限大的理想导体平行板之间填充空气，如图2—16所示。两平行板之间存在一时谐电磁场，电场强度的瞬时矢量为

$$E(t)=a_y E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{b}\right)\cos(wt-kx)$$

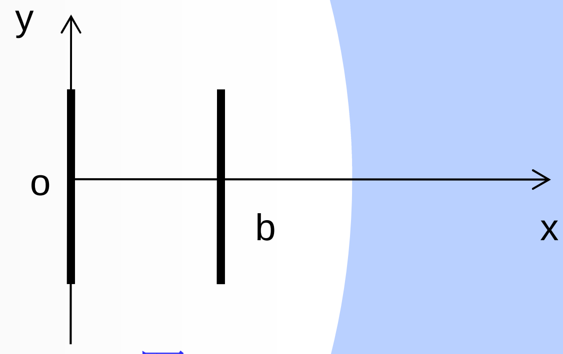


图2—16

求 1 磁场强度的瞬时矢量 $\vec{H}(t)$

2 平均能流密度

3 两导体表面上的面电流密度的瞬时矢量 $\vec{J}_s(t)$

解 (1) 根据电场强度的瞬时矢量 $\vec{E}(t)$，可以得其复矢量的表达式为

$$\vec{E} = \vec{a}_y E_0 \sin\left(\frac{\pi z}{b}\right) e^{-jkx} = \vec{a}_y E_y$$

将复矢量 E 带入复数形式的麦克斯韦第一旋度方程 $\nabla \times \vec{E} = -jw\mu_0 \vec{H}$，得

$$\vec{H} = \frac{j}{w\mu_0}(\nabla \times \vec{E}) = \frac{j}{w\mu_0}\begin{vmatrix} \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \vec{E}_y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\vec{a}_x \frac{j\pi E_0}{w\mu_0 b}\cos\left(\frac{\pi z}{b}\right) e^{-jkx} + \vec{a}_z \frac{kE_0}{w\mu_0}\sin\left(\frac{\pi z}{b}\right) e^{-jkx}$$

于是磁场强度的瞬时矢量

$$\vec{H}(t) = \mathrm{Re}[\vec{H} e^{jwt}] = \vec{a}_x \frac{\pi E_0}{w\mu_0 b}\cos\left(\frac{\pi z}{b}\right)\sin(wt - kx) + \vec{a}_z \frac{kE_0}{w\mu_0}\sin\left(\frac{\pi z}{b}\right)\cos(wt - kx)$$

(2) 因为复坡印亭矢量为

$$\vec{S}=\frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H}^*)=\vec{a}_x\frac{kE_0^2}{2w\mu_0}\sin^2(\frac{\pi z}{b})-\vec{a}_z\frac{j\pi E_0^2}{4w\mu_0 b}\sin(\frac{2\pi z}{b})$$

平均能流密度矢量为

$$\vec{S}_{av}=\mathrm{Re}[\vec{S}]=\vec{a}_x\frac{kE_0^2}{2w\mu_0}\sin^2(\frac{\pi z}{b})$$

(3) 在z＝0处导体的右表面上，因为 $\vec{a}_n=\vec{a}_z$

所以该导体表面上的面电流密度的瞬时表达式为

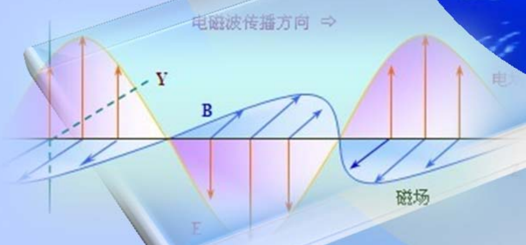
$$\vec{J}_s(t)|_{z=0}=[\vec{a}_n\times\vec{H}(t)]|_{z=0}=[\vec{a}_z\times\vec{H}(t)]|_{z=0}$$

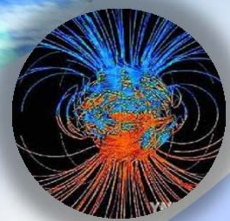
$$=\vec{a}_y\frac{\pi E_0}{w\mu_0 b}\sin(wt-kx)$$

在z＝b处导体的左表面上，因为 $\vec{a}_n=-\vec{a}_z$

$$\vec{J}_s(t)|_{z=b}=[\vec{a}_n\times\vec{H}(t)]|_{z=b}=[-\vec{a}_z\times\vec{H}(t)]|_{z=b}=\vec{a}_y\frac{\pi E_0}{w\mu_0 b}\sin(wt-kx)=\vec{J}_s(t)|_{z=0}$$

Thank You !





何广强