

### 第二章 静电场

### 何广强

上海交通大学电子工程系量子非线性光子学实验室











- 1 2.1 静电场方程
- 2.2 电位
- 3 2.3 介质中电场
- 4 2.4 电容

- 5 2.5 边界条件
- 6 2.6 边值问题
- 7 2.7 静电场能量
- 8 2.8 作业





- 1 2.1 静电场方程
- 2 2.2 电位
- 3 2.3 介质中电场
- 4 2.4 电容

- 5 2.5 边界条件
- 6 2.6 边值问题
- 7 2.7 静电场能量
- 8 2.8 作业

# 真空中静电场的基本方程 静电场的源—电荷和电荷密度

上海交诵大学



宏观上,可以用电荷密度来描述带电体的电荷分布。为此,定义体 电荷密度为

$$\rho = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta v} = \frac{dQ}{dv} \quad C/m^3 \tag{1}$$

其中  $\Delta Q$  是体积元  $\Delta v$  内包含的总电荷量。

# 真空中静电场的基本方程 静电场的源—电荷和电荷密度

**上海交诵大学** 



当电荷存在于一无限薄的薄层或截面很小的细线上时,将薄层或细线上的电荷分布分别用面电荷密度或线电荷密度来描述较为方便。 定义面电荷密度  $\rho_s$  和线电荷密度  $\rho_l$  分别为

$$\rho_s = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta s} = \frac{dQ}{ds} \quad C/m^2 \tag{2}$$

$$\rho_l = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl} \quad C/m \tag{3}$$

其中  $\Delta Q$  分别是薄层的面积元  $\Delta s$  或细线的长度元  $\Delta l$  上的电荷量。

于是,一个体积为 V、表面积为 s 以及线长为 l 上包含的总电荷可分别对以上三式进行体、面和线积分得到,其表达式分别为

$$Q = \int_{V} \rho dv, \quad Q = \int_{s} \rho_{s} ds, \quad Q = \int_{l} \rho_{l} dl \tag{4}$$

上海交通大学



若两个带电体的尺寸远小于带电体之间的距离,则带电体可视为点电荷。库仑定律是关于两个点电荷之间相互作用力的定量描述,它是由法国物理学家库仑(C. A. Coulomb)于 1785年通过实验总结出的定律。

库仑定律叙述为:在真空中,两个点电荷  $Q_1$  和  $Q_2$  ( $Q_1$ ,  $Q_2$  是点电荷的电荷量,为方便起见,按习惯将  $Q_1$ ,  $Q_2$  称为点电荷)之间相互作用力的方向沿着这两个点电荷的连线,同号电荷相斥,异号电荷相吸,作用力的大小与电量  $Q_1$  和  $Q_2$  的乘积成正比,而与这两个点电荷之间的距离 R 的平方成反比。如 Figure 1所示。





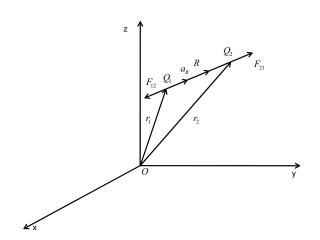


Figure 1: 两个点电荷间的库仑力

上海交诵大学



### 用数学表达式表示,有

$$\vec{F}_{21} = \frac{Q_1 Q_2 \vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \vec{a}_R \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R^2} N \tag{5}$$

其中  $\vec{F}_{21}$  表示点电荷  $Q_1$  作用在点电荷  $Q_2$  上的力,  $\varepsilon_0 = (1/36\pi) \times 10^{-9} \approx 8.854 \times 10^{-12} F/m , \ \,$ 为真空的介电常数,  $\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{a}_R R = \vec{a}_R | \vec{r}_2 - \vec{r}_1 | , \ \,$ 是  $Q_1$  到  $Q_2$  的距离矢量。



电场中某点的电场强度在量值和方向上等于一个实验电荷(一般取为单位正电荷)在该点所受的力,即

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0} \quad V/m \tag{6}$$

式中试验电荷量  $Q_0$  及其体积应尽可能小,从而使原电场受到的影响可忽略不计。

这样,若空间中任一点 P 处的电场强为度, $\vec{E}$  则作用于该点处点电荷 Q 的作用力为

$$\vec{F} = Q\vec{E} \tag{7}$$

由此,可写出真空中距点电荷 Q 的距离为 R 处的点的电场强度为

$$\vec{E} = \frac{Q\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \tag{8}$$

上海交诵大学



一般地,若真空中有 n 个点电荷,则空间中任意点 P 处的总电场强度为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{R_i^3} \vec{R}_i$$
 (9)

式中, $\vec{R}_i = \vec{r} - \vec{r}_i$  代表从  $Q_i$  所在点到 P 点的距离矢量,方向由点电荷  $Q_i$  所在点(源点)指向场点  $P_\bullet$ 

上海交诵大学



对真空中有限区域内连续分布的体电荷,设体电荷分布的体积为 v,则体积 v 之外的任一点 P 处的电场强度为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_v \frac{\rho(\vec{r'})\vec{R}}{R^3} dv' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_v \frac{\rho(\vec{r'})(\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} dv'$$
 (10)

式中:  $\vec{r}$  为点 P 的矢径,  $\vec{r'}$  为体电荷元 dv' 所在点的矢径。

类似地,以线、面分布的电荷产生的电场强度的表达式也容易写出,此时只需将上式中的  $\rho(\vec{r'})dv'$  分别改写为  $\rho_l(\vec{r'})dl'$  和  $\rho_s(\vec{r'})ds'$  即可。

### 

高斯定理与电通量密度



上海交通大学

除电场强度  $\vec{E}$  外,通常还引出另外一个场矢量  $\vec{D}$ ,称为电通量密度(或电位移矢量)。

真空中,电通量密度  $\vec{D}$  可由电场强度  $\vec{E}$  定义为

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad C/m^2 \tag{11}$$

应指出,到目前为止,我们仅限于讨论真空或自由空间的情况(由后续内容可知,对简单媒质, $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ )。

高斯定理与电通量密度



高斯定理叙述为: 穿过真空或自由空间中任意封闭面的电通量等于此封闭面所包围的自由电荷总电量,即

$$\oint_{s} \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q \tag{12}$$

$$\oint_{s} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{13}$$

这是由德国的高斯 (K. F. Gauss) 于 1839 年导出的高斯定理的积分形式。

若体电荷分布于封闭面所包围的体积内,则上式可写成

$$\oint_{s} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{v} \rho dv \tag{14}$$

高斯定理与电通量密度



对上式左端应用散度定理,则

$$\int_{v} \nabla \cdot \vec{D} dv = \int_{v} \rho dv \tag{15}$$

此式对任意的封闭面 s 所包围的体积均应成立,因此两端体积分中的被积函数应相等。于是,在空间任一点处,可得

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{16}$$

这是高斯定理的微分形式,即空间任一点处电通量密度的散度等 于该点处的体电荷密度。上述方程是静电场的基本方程之一。



如前所述,静电场中试验电荷 (取为单位正电荷) 所受到的作用力为

$$\vec{F} = Q_0 \vec{E} \tag{17}$$

这样,外力使试验电荷自场中 a 点移到 b 点所作的功为

$$W_{ba} = -Q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \tag{18}$$

利用此式不难证明外力作功(或电场力作功)仅取决于静电场中起点 a 和终点 b 的位置,而与 Q<sub>0</sub> 所经过的路径无关。



#### 这样, 若使点电荷沿闭合路径移动, 则外力所作的功为

$$W_{ba} = -Q_0 \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{19}$$

或

$$\oint_{l} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \tag{20}$$

这表明,静电场中电场强度  $Q_0$  是无旋的或保守的,即静电场是无旋场或保守场。

对上式利用斯托克斯定理,得

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \tag{21}$$

上述方程也是静电场的基本方程之一。



- 1 2.1 静电场方程
- 2.2 电位
- 3 2.3 介质中电场
- 4 2.4 电容

- 5 2.5 边界条件
- 6 2.6 边值问题
- 7 2.7 静电场能量
- 8 2.8 作业



■电位

由此可见, $\overrightarrow{E}$  可由一个标量函数表达因此引入**电位** V

$$\overrightarrow{E} = -\nabla V$$

关于电位的讨论:电位为电场的辅助函数,是一个标量函数。"—" 表示电场指向<mark>电位减小最快</mark>的方向。在直角坐标系中

$$\overrightarrow{E} = -(\overrightarrow{a}_x \frac{\partial V}{\partial x} + \overrightarrow{a}_y \frac{\partial V}{\partial y} + \overrightarrow{a}_z \frac{\partial V}{\partial z})$$
 (22)

上海交诵大学



#### ■ 电位差

电位差反映了电位空间中不同点处电位的变化量。

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial l} \overrightarrow{a}_{l} \Rightarrow \overrightarrow{E} = -\frac{\partial V}{\partial l} \overrightarrow{a}_{l})$$

$$\Rightarrow dV = -\overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{l}$$

$$\Rightarrow V_{ba} = V_{b} - V_{a} = -\int_{a}^{b} \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{l}$$

### 关于电位差的说明:

A、意义: b、a 两点间的电位差等于将单位正电荷从 b 点移到 a 点过程中电场力做的功。

B、两点间的电位差有确定的值,只与首尾两点的位置有关,与积分路径无关。

# 电位和电位方程 电位参考点

上海交诵大学



显然, 电位函数 V 不是唯一确定的, 可以加上任意一个常数仍表示同一电场, 即

$$V' = V + C \neq V, \quad \overrightarrow{E} = -\nabla V' = \nabla (V + C) = -\nabla V$$
 (23)

为了使空间各点电位具有确定值,必须选定空间某一点作为电位参考点,且令参考点的电位为 0,由于空间各点与参考点之间的电位差具有确定值,所以该点的电位也就具有确定值。即



#### 选择参考点的原则:

A. 应使电位表达式有意义; B. 应使电位表达式最简单; C. 同一问题只能有一个电位参考点; 电位参考点的电位一般设为 0。

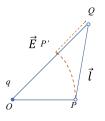
### 电位和电位方程 几种常见的电位方程



### (1)、点电荷的电位

$$\begin{cases} V_P - V_Q = -\int_Q^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = (\int_P^{P'} + \int_{P'}^Q) \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ \vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \vec{a}_R \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_P - V_Q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{P'}^Q \frac{\vec{a}_R \cdot d\vec{R}}{R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_P} - \frac{1}{R_Q} \right) \tag{24}$$



上海交通大学

若参考点选在无穷远处,即  $R_Q \to \infty$ ,则

$$V_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_P}, \qquad R_P = |\vec{r} - \vec{r'}| \tag{25}$$

### 说明:

若电荷分布在有限区域内,一般选择无穷远处为电位参考点。

# 电位和电位方程 几种常见的电位方程

上海交诵大学



#### (2)、分布电荷体系在空间中产生的电位

体电荷:  $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')dV}{R}$  面电荷:  $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_S \frac{\rho_S(\vec{r}')dS}{R}$ 

线电荷:  $V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_I \frac{\rho_I(\vec{r}')dV}{R}$ 

式中:  $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ , 电位参考点均选在无穷远处。

### 引入电位函数的意义:

简化电场的求解!在某些情况下,直接求解电场强度很困难,但求解电位函数则相对简单,因此可以通过先求解电位函数,再求解电场强度。——间接求解法。

### 电位和电位方程

静电场电位方程的建立

上海交诵大学



在存在电荷分布的区域内 (有源区), 均匀媒质中的电位方程为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \vec{E} = -\nabla V \end{cases}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$
(26)

即  $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ , 电位的泊松方程。

在无源区中,  $\rho = 0$ 

 $abla^2 V = 0$ ,电位的拉普拉斯方程。

### 应用:

用于求解静电场的边值问题。

# 电位和电位方程

上海交通大学



### 求无限长线电荷在真空中产生的电场。

分析: 电场方向垂直圆柱面, 大小只与 r

有关。

解答: 取如 Figure 2 所示高斯面, 由高斯

定律,有

$$\begin{split} \oint_{S} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} &= \frac{Q}{\varepsilon_{0}} \\ \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) \cdot (2\pi r l \cdot \vec{a}_{r}) &= \frac{\rho_{l} \cdot l}{\varepsilon_{0}} \\ \Rightarrow \vec{E} &= \frac{\rho_{l}}{2\pi \varepsilon_{0} r} \cdot \vec{a}_{r} \end{split}$$

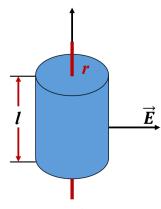


Figure 2: 例 2.1 题图

上海交诵大学



### 真空中间距为 I 的两根无限长平行双导线构成的平行双线的横截面,假设平行双线上电荷均匀分布,线电荷密度分别为 $\pm \rho_{\ell}$ 。求空间任一点 p 处的电位。

解答: 线电荷  $\pm \rho_l$  在点 P 产生的电位

$$V_{+} = \int_{p}^{p_0} \vec{E}_{+} \cdot d\vec{l} = \int_{A}^{p_0} \vec{E}_{l} \cdot d\vec{l}$$
$$= \int_{r_{+}}^{r_0 +} \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r} dr = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\frac{r_{0+}}{r_{+}})$$

线电荷  $-\rho_l$  在 P 点的产生的电位:

$$V_{-} = \int_{B}^{p_{0}} \vec{E}_{-} \cdot d\vec{l} = -\int_{r_{-}}^{r_{0}+} \frac{\rho_{l}}{2\pi\varepsilon_{0}r} dr$$
$$= -\frac{\rho_{l}}{2\pi\varepsilon_{0}} \ln(\frac{r_{0}-}{r_{-}})$$

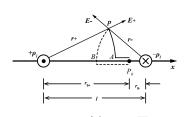


Figure 3: 例 2.2 题图



#### P 点的总电位:

$$V_P = V_+ + V_- = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\frac{r_-}{r_+}) + \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\frac{r_{0+}}{r_{0-}}) = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\frac{r_-}{r_+}) + C$$

若 
$$r_{0+}=r_{0-}=l/2$$
,  $C=0$ , 则 P 点电位为

$$V_P = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\frac{r_-}{r_+}) = \frac{\rho_l}{4\pi\varepsilon_0} \ln\frac{(x-l/2)^2 + y^2}{(x+l/2)^2 + y^2}$$

# 电位和电位方程

上海交诵大学



有两块无限大的导体平板分别置于 x=0 处,己知 x=0 处,V=0 ; x=a 处, $V=V_0$  在两导体平板间有体电荷密度  $\rho=\rho_0x/a$  的电荷分布。求两导体平板间的电位和电场分布。

#### 解答:

两导体间的电位满足泊松方程:  $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ ,

由于电位 V 与 y, z 无关,所以  $\nabla^2 V = \frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho_0 x}{\varepsilon_0 a}$ ,

积分得, 
$$V = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0 a}x^3 + C_1x + C_2$$

利用边界条件:  $V|_{x=0}=0$ ,  $V|_{x=a}=V_0$ , 可得  $C_1=\frac{V_0}{a}+\frac{\rho_0 a}{6\varepsilon_0}$ ,  $C_2=0$ .

$$\mathbb{J} V = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0 a} x^3 + (\frac{V_0}{a} + \frac{\rho_0 a}{6\varepsilon_0}) x$$

电场强度 
$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{dV}{dx}\vec{a}_x = \left[\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 a}x^2 - \left(\frac{V_0}{a} + \frac{\rho_0 a}{6\varepsilon_0}\right)\right]\vec{a}_x$$



- 1 2.1 静电场方程
- 2 2.2 电位
- 3 2.3 介质中电场
- 4 2.4 电容

- 5 2.5 边界条件
- 6 2.6 边值问题
- 7 2.7 静电场能量
- 8 2.8 作业



### 电偶极子的电位和电场强度

**电偶极子**,指真空中由一对相距小距离的等值异号电荷构成的场源系统。

电偶极矩,  $\vec{p} = Q\vec{d}$ , 方向由负电荷指向正电荷。

选取如 Figure 4 所示得球坐标系,则 P 点电位为:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_- - R_+}{R_- R_+} \tag{27}$$

$$V \approx \frac{Qd\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}_R}{4\pi\varepsilon_0 R^2} (R \gg d)$$
 (28)

电场强度为

$$\vec{E} = -\nabla V = \vec{a}_R \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3} + \vec{a}_\theta \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$$
 (29)

电偶极子的电位和电场强度



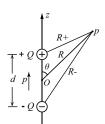


Figure 4: 电偶极子示意图

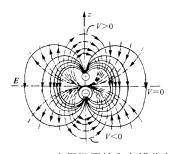


Figure 5: 电偶极子的电力线分布

$$R_{+} = [R^{2} + (\frac{d}{2})^{2} - 2R(\frac{d}{2})\cos\theta]^{1/2} \approx R - (\frac{d}{2})\cos\theta$$

$$R_{-} = [R^{2} + (\frac{d}{2})^{2} + 2R(\frac{d}{2})\cos\theta]^{1/2} \approx R + (\frac{d}{2})\cos\theta$$

$$R_{+}R_{-} = R^{2} - [(\frac{d}{2}\cos\theta)]^{2} \approx R^{2}$$

# 电介质中的电场电介质

上海交诵大学



电介质: 指导磁率为  $\mu_0$  的媒质 (电导率很小)。

- 电介质可分为无极性介质和有极性介质。电介质可以看作内部存在大量不规则且方向迅速变化的分子极矩的电荷系统。
- 热平衡时,分子无规则运动,分子极矩取向各方向概率相同,介质在宏观上不显出电特性。
- 电介质的极化:在外加电场的作用下,无极分子变为有极性分子, 有极分子的取向一致,宏观上出现电偶极矩,表现出电特性。

### 电介质中的电场 极化强度矢量

卜海交诵大学



### 极化强度矢量:

用极化强度矢量  $\vec{P}$  表示电介质被极化的程度。

$$\vec{P} = \lim_{\nabla V \to 0} \frac{1}{\nabla V} \sum \vec{p} \tag{30}$$

物理意义:单位体积内电偶极矩的矢量和。

说明:对于线性、各向同性电介质, $\vec{P}=arepsilon_0\chi_e\vec{E}$ ,  $\chi_e$ : 电介质的极化率。

# 电介质中的电场 极化强度矢量

上海交诵大学



# 极化介质中体积元 dV 内电偶极矩在任意一点 P 处产生的电位微元为 $d\phi = \frac{\vec{P} \cdot \vec{R} dV'}{4\pi\pi \circ R^3}$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} \frac{\vec{P} \cdot \vec{R}}{R^3} dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \vec{P} \cdot \nabla' (\frac{1}{R}) dV'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[ \int_{V'} \nabla' \cdot (\frac{\vec{P}}{R}) dV' - \int_{V'} \frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{R} dV' \right]$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oint_{S'} \frac{\vec{P} \cdot \vec{a}_n}{R} dS' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{V'} -\frac{\nabla' \cdot \vec{P}}{R} dV'$$
(31)

束缚体电荷密度:  $\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$  束缚面电荷密度:  $\rho_{ps} = \vec{P} \cdot \vec{a}_n$  注:  $\vec{P} \cdot \nabla' 1/R = \nabla' \cdot (\vec{P}/R) - (\nabla' \cdot \vec{P})/R$ 

# 电介质中的电场 极化电荷

上海交通大学



### 极化电荷:

电介质被极化后,在其内部和分界面上将出现电荷分布,这种电荷称为极化电荷。由于相对于自由电子而言,极化电荷不能自由运动,故也称为束缚电荷。

位于电介质内部的极化电荷称为体极化电荷,体极化电荷密度为

$$\rho_p = -\nabla \cdot \vec{P}$$

位于电介质表面的极化电荷称为面极化电荷,面极化电荷密度为

$$\rho_{pS} = \vec{P} \cdot \vec{a}_n$$

电介质中的高斯定理荷



$$abla \cdot \vec{E} = rac{
ho + 
ho_p}{arepsilon_0}$$
 ,  $\, 
abla \cdot (arepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = 
ho$ 

仟—媒质中的电通量密度定义为

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$
 (32)

式中  $\varepsilon$  称为介质的介电常数,  $\varepsilon_r$  是介质的相对介电常数。

#### 微分形式的高斯定理:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \tag{33}$$

#### 积分形式的高斯定理:

$$\oint_{S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \tag{34}$$

说明:  $\vec{D}$  的源是自由电荷,而  $\vec{E}$  源既包含自由电荷也包含束缚电荷。

上海交诵大学



在真空中有一半径为 a 的球体,球体中均匀充满体电荷度为  $\rho$  的电荷,已知 球内的介电常数为  $\varepsilon_0$ ,求球内、外的电位和电场强度的表达式。

分析: 本题有多种解题思路。典型的一种求解思路是利用高斯定理求出球内、外的电场强度在选取无穷远处为电位参者点的怙况下,根据电场强度求球内、外的电位。这里采用另一种题思路。即利用电位方程和边界条件求电位,然后由电位求电场强度。

解答: (1) 求球内、外的电位

设球内外的电位分别为  $\phi_1$  和  $\phi_2$ ,又由于球内的电荷均匀分布,故球内外的场分布具有球对称性。于是, $\phi_1$  和  $\phi_2$  满足以下的泊松方程和拉昔拉斯方程

$$\nabla^2 \phi_1 = \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} (R^2 \frac{d\phi_1}{dR}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (R \le a)$$

$$\nabla^2 \phi_2 = \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} (R^2 \frac{d\phi_2}{dR}) = 0, \quad (R > a)$$

#### 边界条件 \_\_\_ 例 2.3



将以上两个方程积分两次,可得  $\phi_1$  和  $\phi_2$  通解为:

$$\phi_1 = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}R^2 - \frac{A}{R} + B$$
$$\phi_2 = -\frac{C}{R} + D$$

若选取电位的参考点在无远处,则球外两区域中的电位  $\phi_1$  和  $\phi_2$  满足以下边界条件:

$$\phi_1|_{R=a} = \phi_2|_{R=a}$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \phi_1}{\partial R}|_{R=a} = \varepsilon_0 \frac{\partial \phi_2}{\partial R}|_{R=a}$$

$$\phi_2|_{R\to\infty} = 0$$

$$\phi_1|_{R=0} \neq \infty$$

将  $\phi_1$  和  $\phi_2$  的通解代入,得 A=0,D=0,C= $-\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}$ ,B= $\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$ 。所以

$$\phi_1 = -\frac{\rho a^2}{6\varepsilon_0} + -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}, \quad (R \le a)$$
$$\phi_2 = -\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 R}, \quad R > a$$



- 1 2.1 静电场方程
- 2 2.2 电位
- 3 2.3 介质中电场
- 4 2.4 电容

- 5 2.5 边界条件
- 6 2.6 边值问题
- 7 2.7 静电场能量
- 8 2.8 作业

# 静电场导体系统中的电容 静电场中导体的特点

上海交通大学



导体是指内部有大量自由电荷的媒质。

#### 静电平衡状态:

导体在静电场中处于静电平衡状态,导体内部不存在电荷,电荷 只能分布在表面,导体内部任意点电场强度为 0,此时导体是等位体, 导体表面是等位面。

静电感应现象:外电场使导体内部电荷重新分配的现象。 感应电荷:

带电导体的电位高低决定于所带电荷、自身形状以及附近电荷。

### 静电场导体系统中的电容 电容器和电容

上海交诵大学



孤立导体的电位决定于本身的形状,并与所带电量成正比。 孤立导体的电容:孤立导体所带电荷量与其电位之比。

$$C = \frac{Q}{V} \tag{35}$$

#### 关于孤立导体电容的说明:

电容 C 只与导体几何性质、导体间距和周围介质有关。两个导体构成电容器,若导体电位分别为  $V_1$  ,  $V_2$  , 带电量分别为 Q , -Q , 则定义电容器电容为

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} \tag{36}$$

### 静电场导体系统中的电容 例 2.4

上海交通大学



# 平行双线,导线半径为 a,导线轴线距离为 D,求: 平行双线单位长度 的电容。( $a \ll D$ )

解答:设导线单位长度带电分别为  $+\rho_l$  和  $-\rho_l$ , 易于求得,在 P 点处,

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 x} \vec{e}_x, \quad \vec{E}_2 = \frac{-\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 (D-x)} (-\vec{e}_x)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} (\frac{1}{x} + \frac{1}{D-x}) \vec{e}_x$$

#### 导线间电位差为:

$$U = \int_{a}^{D-a} \vec{E} \cdot d\vec{x} = \frac{\rho_{l}}{\pi \varepsilon_{0}} \ln \frac{D-a}{a}$$

电容: 
$$C = \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln(D-a) - \ln a}$$

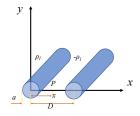


Figure 6: 例 2.4 题图



#### 计算同轴线内外导体间单位长度电容。

解答: 设同轴线内外导体单位长度带电量分别为  $+\rho_l$  和  $-\rho_l$ ,则内外导体间电场分布为:

$$\vec{E} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{e_r}$$

#### 内外导体电位差为:

$$U = \int_{a}^{b} \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

#### 导体间电容为:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln b - \ln a}$$



Figure 7: 例 2.5 题图



- 1 2.1 静电场方程
- 2 2.2 电位
- 3 2.3 介质中电场
- 4 2.4 电容

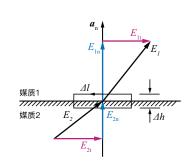
- 5 2.5 边界条件
- 6 2.6 边值问题
- 7 2.7 静电场能量
- 8 2.8 作业

### 静电场的边界条件 电场强度的边界条件

上海交诵大学



$$\begin{split} \oint_{l} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \vec{E}_{1} \cdot \Delta \vec{l} - \vec{E}_{2} \cdot \Delta \vec{l} \\ &= E_{1t} \Delta l - E_{2t} \Delta l = - \int_{\Delta S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0 \\ &\lim_{\Delta S \to 0} \int_{\Delta S} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0 \\ &\vec{a}_{n} \times (\vec{E}_{1} - \vec{E}_{2}) = 0 \Leftrightarrow E_{1t} = E_{2t} \end{split}$$



#### 结论:

电场强度在不同媒质分界面两侧切向分量连续。

上海交诵大学

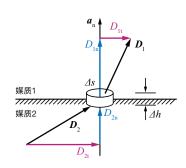


$$\oint_{S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \vec{D}_{1} \cdot \vec{a}_{n} \Delta S - \vec{D}_{2} \cdot \vec{a}_{n} \Delta S$$

$$= (D_{1n} - D_{2n}) \Delta S = \Delta Q$$

$$(\vec{D}_{1} - \vec{D}_{2}) \cdot \vec{a}_{n} = \rho_{S} \tag{37}$$

 $D_{1n} - D_{2n} = \rho_S$ 



#### 结论:

电通密度在不同媒质分界面两侧的**法向分量不连续**,其差值恰好等于分界面上**自由电荷面密度**。

(38)

### 两种媒质交界面上的边界条件 电场矢量 E 和 D 的边界条件

上海交诵大学



在求解静电场的边值问题时,经常需要两种不同媒质交界面上的边界条件。

$$\vec{a}_n \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0$$
  
$$\vec{a}_n \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_S$$

A: 理想介质 1 与理想导体 2 的交界面:

$$Med.1 = \begin{cases} \vec{E}_{1t} = 0 \\ \vec{D}_{1n} = \rho_S \Rightarrow \vec{E}_{1n} = \rho_S/\varepsilon_1 \end{cases} Cond.2 = \begin{cases} \vec{E}_{2t} = 0 \\ \vec{D}_{2n} = 0, \quad \vec{E}_{2n} = 0 \end{cases}$$

导体表面介质 1 中的静电场总是垂直于导体表面

B: 两种理想介质的交界面,不含自由面电荷:

$$\begin{split} \vec{E}_{1t} &= \vec{E}_{2t}, \quad \vec{D}_{1n} = \vec{D}_{2n} \quad \Leftrightarrow \varepsilon_1 \vec{E}_{1n} = \varepsilon_2 \vec{E}_{2n} \\ \vec{E}_{1n} &- \vec{E}_{2n} = \frac{\rho_{pS}}{\varepsilon_0} \end{split}$$

# TA TONG THE

上海交通大学

### 两种媒质交界面上的边界条件 电位 V 的边界条件

A:  $V_1 = V_2$  交界面处电位连续:

$$\mbox{B:} \ \ D_{in} = \varepsilon_i E_{in} = -\varepsilon_i \frac{\partial V_i}{\partial n}, \qquad i=1,2 \label{eq:bispec}$$

n: 交界面法向方向

$$\varepsilon_2 \frac{\partial V_2}{\partial n} - \varepsilon_1 \frac{\partial V_1}{\partial n} = \rho_s$$

交界面处存在自由面电荷,电位导数不连续。

$$\begin{split} \varepsilon_{0}E_{1n} + P_{1n} &= \varepsilon_{0}E_{2n} + P_{2n} \\ E_{1n} - E_{2n} &= \frac{(P_{2n} - P_{1n})}{\varepsilon_{0}} \\ P_{2n} - P_{1n} &= \rho_{pS} \\ \rho_{pS_{1}} &= -\vec{P}_{1} \cdot \vec{a}_{n}, \rho_{pS_{2}} = \vec{P}_{2} \cdot \vec{a}_{n}, \rho_{pS} = \rho_{pS_{1}} + \rho_{pS_{2}} \end{split}$$



同轴线内导体半径为 a , 外导体半径为 b , 内外导体间充满介电常数分别为  $\varepsilon_1$  和  $\varepsilon_1$  的两种理想介质,分界面半径为 c 。己知外导体接地,内导体电压为 u 。求:

(1) 导体间的  $\vec{E}$  和  $\vec{D}$  分布; (2) 同轴线单位长度的电容。

分析:电场方向重直于边界,由边界条件可知, 在媒质两边  $\vec{D}$  连续。

解答:设内导体单位长度带电量为  $\rho_l$ ,由高斯定律,可以求得两边媒质中:

$$\vec{D} = \frac{\rho_l}{2\pi r} \vec{e}_r \Rightarrow \begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{D}/\varepsilon_1 \\ \vec{E}_2 = \vec{D}/\varepsilon_2 \end{cases}$$

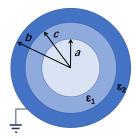


Figure 8: 例 2.4 题图



$$\therefore U = \int_{a}^{c} \vec{E}_{1} \cdot d\vec{r} + \int_{c}^{b} \vec{E}_{2} \cdot d\vec{r} = \frac{\rho_{l}}{2\pi\varepsilon_{1}} \ln \frac{c}{a} + \frac{\rho_{l}}{2\pi\varepsilon_{2}} \ln \frac{b}{c}$$

$$\Rightarrow \rho_{l} = \frac{2\pi\varepsilon_{1}\varepsilon_{2}U}{\varepsilon_{2} \ln \frac{c}{a} + \varepsilon_{1} \ln \frac{b}{c}}$$

$$\vec{D} = \frac{\varepsilon_{1}\varepsilon_{2}U}{(\varepsilon_{2} \ln \frac{c}{a} + \varepsilon_{1} \ln \frac{b}{c}) \cdot r}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \begin{cases} \frac{\varepsilon_{2}U}{(\varepsilon_{2} \ln \frac{c}{a} + \varepsilon_{1} \ln \frac{b}{c}) \cdot r}, & (a < r < c) \\ \frac{\varepsilon_{1}U}{(\varepsilon_{2} \ln \frac{c}{a} + \varepsilon_{1} \ln \frac{b}{c}) \cdot r}, & (c < r < b) \end{cases}$$



同轴线内导体半径为a,外导体半径为b,内外导体之间填充介质的 介电常数为 $\varepsilon$ , 内外导体间的电压为U。且外导体接地。

- 求: 1、内外导体间的电位分布:
  - 2、内导体表面上的面电荷密度:
  - 3、单位长度上的电容。

解: 1、选取圆柱坐标系,由圆对称性可知,同轴线内外导体的电位 只是变量r的函数,因此拉普拉斯方程变为

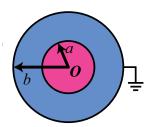
$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{dV}{dr}) = 0$$

积分得:  $V = A \ln r + B$ 

由边界条件
$$V|_{r=b}=0$$
及 $V|_{r=a}=U_0$  得 $B=-A\ln b, A=\frac{U_0}{\ln(a/b)}$ 

于是
$$V = U_0 \frac{\ln(\frac{r}{b})}{\ln(\frac{a}{b})}$$

2、
$$\bar{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r}\bar{a}_r = \frac{U_o}{r\ln(\frac{b}{a})}, \rho_s|_{r=a} = \bar{a}_r \cdot \bar{D}|_{r=a} = D_r \left|_{r=a} = \varepsilon \frac{U_o}{a\ln(\frac{b}{a})} \right|$$
 单位长度上的电容为:  $C = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln(\frac{b}{a})}$ 



3、内导体单位长度上的电荷为

$$q_I = 2\pi a \rho_S = \frac{2\pi \varepsilon U_0}{\ln(\frac{b}{a})}$$



- 1 2.1 静电场方程
- 2 2.2 电位
- 3 2.3 介质中电场
- 4 2.4 电容

- 5 2.5 边界条件
- 6 2.6 边值问题
- 7 2.7 静电场能量
- 8 2.8 作业

# 静电场边值问题的解法 概述

上海交通大学



#### 静电场边值问题

- 1 第一类边值问题 (Dirichlet 问题): 己知全部边界上的电位分布;
- 2 第二类边值问题 (Neumann 问题): 己知边界上电位的法向导数;
- 3 第三类边值问题 (Robbin 问题): 己知一部分边界上的电位和另一部分边界 上的法向导数,强调电位函数的唯一性定 理。

#### 电位函数的唯一性定理

分离变量法 镜像法 解析法 复变函数法

解法

格林函数法

近似法 图解法

数值解法

#### 分离变量法是求解拉普拉斯方程的最基本的方法

主要用于求解二维和三维的问题。 镜像法可以求解不便于用其他方法求解的一类特殊的边值问题。



#### 在直角坐标系中, 电位的拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{39}$$

设 
$$V(x,y,z) = X(x)Y(y)Z(z)$$
, 整理得

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$$
 (40)

### 静电场边值问题的解法 分离变量法

上海交通大学



为使所有的 x,y,z 满足此式,三项中的每一项都必须等于一个常数。设这三个常数分别为  $-k_x^2, -k_y^2, -k_z^2$  则

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dx^2} + k_x^2 X = 0\\ \frac{d^2Y}{dy^2} + k_y^2 Y = 0\\ \frac{d^2Z}{dz^2} + k_z^2 Z = 0 \end{cases}$$
(41)

 $k_x^2+k_y^2+k_z^2=0$ ,  $k_x^2,k_y^2$ 和  $k_z^2$  称为分离常数 (本征值)。

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y}\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0 \tag{42}$$

### 静电场边值问题的解法

上海交通大学



对方程 (41) 中第一个方程,若  $k_x = 0$ ,则 X 的通解为  $X = A_0 + B_0 x$ 。 若  $k_x^2 > 0$ ,设  $k_x = k > 0$ ,则其通解为

$$X = A_1 e^{-jkx} + B_1 e^{jkx} (43)$$

或

$$X = A_2 \cos(kx) + B_2 \sin(kx) \tag{44}$$

若  $k_x^2 < 0$ , 设  $k_x^2 = -k^2, k > 0$ , 则原方程通解为

$$X = A_3 e^{-kx} + B_3 e^{kx} (45)$$

或.

$$X = A_4 \cosh(kx) + B_4 \sinh(kx) \tag{46}$$

# 静电场边值问题的解法 分离变量法

上海交通大学



类似地,可得到 y,z 方程的通解。若电位 V 是 x 和 y 的二维函数,设  $k_x^2\geqslant 0$ ,  $k_y^2\leqslant 0$ ,且  $|k_x|=|k_y|=k$ , k>0,通解:

$$V = (A_0 + B_0 x)(C_0 + D_0 y) + (A_1 \cos kx + B_1 \sin kx)(C_1 \cosh ky + D_1 \sinh ky)$$
(47)

#### 级数形式通解:

$$V = (A_0 + B_0 x)(C_0 + D_0 y) + \sum_{i=1}^{n} (A_i \cos k_i x + B_i \sin k_i x)(C_i \cosh k_i y + D_i \sinh k_i y)$$
(48)

### 分离变量法

例 2.8

上海交诵大学



有一横截面为矩形的长金属盒,金属盒的四条棱线处均有无穷小的隙 缝使四个边缘互相绝缘,边壁上的电位分布如图所示。求金属盒内的 电位分布。

分析:因为这是一个长金属盒,可认为电位沿 Z 方向无变化,所以此边值问题是一个二维的封闭 平面场问题。

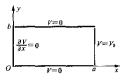


Figure 9: 例 2.8 题图

上海交诵大学



例 2.8

解答: 电位 V(x,y,z) 满足的定解问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = 0\\ \frac{\partial V}{\partial x}|_{x=0} = 0\\ V|_{x=a} = V_0\\ V|_{y=0} = 0\\ V|_{y=b} = 0 \end{cases}$$

根据 V 在 y 方向满足的边界条件可知,  $k_y$  应取正实数。 $k_x$  为纯虚数。故 V(x,y) 通解为

$$V = (A\cosh kx + B\sinh kx)(C\cos ky + D\sin ky)$$

由于 
$$|k_x|=|k_y|=k$$
,  $\frac{\partial V}{\partial x}|_{x=0}=0\Rightarrow B=0$ ;  $V|_{y=0}\Rightarrow C=0$ ;  $V|_{y=b}\Rightarrow k=n\pi/b$ ,  $n=1,2,\cdots$ 则

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh(\frac{n\pi}{b}x) \sin(\frac{n\pi}{b}y)$$

例 2.8



$$V|_{x=a} = V_0 \Rightarrow$$

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh(\frac{n\pi}{b}a) \sin(\frac{n\pi}{b}y)$$

上式两端同乘上  $\sin(\frac{m\pi}{b}y)$ , 从 0 到 b 积分得:

$$\int_0^b V_0 \sin(\frac{m\pi}{b}y) dy = \int_0^b \sin(\frac{m\pi}{b}y) \sum_{n=1}^\infty A_n \cosh(\frac{n\pi}{b}a) \sin(\frac{n\pi}{b}y) dy$$
$$= \sum_{n=1}^\infty A_n \cosh(\frac{n\pi}{b}a) \int_0^b \sin(\frac{m\pi}{b}y) \sin(\frac{n\pi}{b}y) dy$$

由三角函数正交性,只有 m=n 时,上式右端积分不为零。



$$\int_0^b \sin^2(\frac{n\pi}{b}y)dy = \frac{b}{2}$$

$$\int_0^b V_0 \sin(\frac{n\pi}{b}y) dy = \begin{cases} 0, & n = 2m, m \in \mathbb{Z}, \\ \frac{2bV_0}{n\pi}, & n = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$
$$\Rightarrow A_n = \frac{4V_0}{n\pi \cosh \frac{n\pi a}{b}}$$

#### 所以,金属盒内任一点的电位 V(x,y) 为

$$V = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cosh[(2k+1)\frac{\pi x}{b}] \sin[(2k+1)\frac{\pi y}{b}]}{(2k+1)\cosh[(2k+1)\frac{\pi a}{b}]}$$

# 静电场边值问题的解法 镜像法

**上海交诵大学** 



电位函数的唯一性原理:对于任何一种边值问题,满足边界条件的电位泊松方程和拉普拉斯方程的解是唯一的。

镜像法基本原理:在保持边界不变的情况下,将边界移去,在待求区域外部适当位置上放置一些称为镜像电荷的等效电荷,从而将求解有边界的问题转换为求解无边界的问题。

本章只讨论静电场中三个具有导体边界的应用实例。

- 1 接地导电平面附近的点电荷
- 2 导体圆柱和平行线电荷
- 3 导体球和点电荷

### 静电场边值问题的解法 接地平面导体的镜像







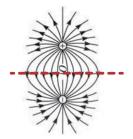


Figure 10: 平面导体的镜像

a. 
$$\nabla^2 \phi = 0$$
 空气中除点电荷外

$$\phi$$
|导板 = 0  $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$ 

b.  $\nabla^2 \phi = 0$ 上半场域除点电荷外

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = 0 \quad \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$$

方程相同,边界条件相同,解惟一。

### 静电场边值问题的解法 接地导电平面附近的点电荷

上海交诵大学



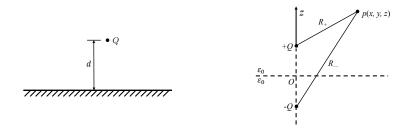


Figure 11: 无限大接地导电平面上方的点电荷

如上图所示,设在无限大接地导电平面上方有一电量为 Q 的点电荷, 点电荷与平面间的距离为 d。应用镜像法,求导电平面上方点电荷存在 的空间中任一点 P 处的电位。



解:

$$V_p = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left( \frac{1}{R_+} - \frac{1}{R_-} \right)$$

$$R_{+} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - d)^2}, R_{-} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z + d)^2}$$

根据静电场的边界条件,可求得z=0上的感应面电荷密度,

$$\rho_S = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial z}\Big|_{z=0} = -\frac{Qd}{2\pi (x^2 + y^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$Q_{in} = \int_{s} \rho_{s} dS = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\infty} -\frac{Qd}{2\pi} (r^{2} + d^{2})^{-\frac{3}{2}} r dr = -\frac{Qd}{(r^{2} + d^{2})^{\frac{1}{2}}} \bigg|_{0}^{\infty} = -Q$$

表明,导电平面上总感应电荷确实等于镜像电荷。

# 静电场边值问题的解法 接地导电平面附近的点电荷

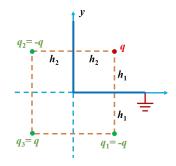
上海交通大学

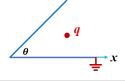


#### 点电荷对相交接地平面导体边界的镜像

如图,两半无限大接地导体平面垂直相交。 要满足在导体平面上电位为零,则必须引 入 3 个镜像电荷。

对于非垂直相交的两导体平面构成的边界, 若夹角为  $\theta=\frac{\pi}{n}$ ,则所有镜像电荷数目为 2n-1 个。





上海交诵大学



# 两无限大接地导体平板相交成如上图所示的角形区域,一点电荷 Q 处于该直角形区域中的点 $P_0(x_0,y_0,0)=P_0(1,1,0)$ 处。

- (1) 求点电荷 Q 在 P(x,y,z) = P(2,1,1) 处的电位和电场强度的表达式;
- (2) 求点电荷 Q 受到的电场力;
- (3) 导出水平和垂直接地导体平板上的感应面电荷密度的表达式。

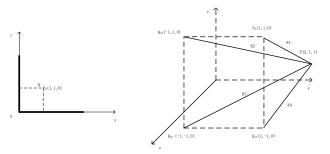


Figure 12: 例 2.9 题图

上海交诵大学



### 例 2.9 解答:

镜像电荷有 3 个,即 $Q_{i1} = -Q$ ,位置坐标为(1, -1, 0);  $Q_{i2} = -Q$ ,位置坐标为(-1, 1, 0);  $Q_{i3} = Q$ ,位置坐标为(-1, -1, 0),它们的坐标如右图所示。

(1) 场点p(2,1,1)处的电位为

$$V_p = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} (\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}) = 2.25 \times 10^9 Q$$

式中,各镜像电荷与场点之间的距离为 $R_1=\sqrt{2},\,R_2=\sqrt{10},\,R_3=\sqrt{14},\,R_4=\sqrt{6}$ 。 而场点p(2,1,1) 处的电场强度为

$$\begin{split} \vec{E}_p &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} (\frac{\vec{a}_{R_1}}{R_1^2} - \frac{\vec{a}_{R_2}}{R_2^2} + \frac{\vec{a}_{R_3}}{R_3^2} - \frac{\vec{a}_{R_4}}{R_4^2}) = \vec{a}_{R_1} \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0} - \vec{a}_{R_2} \frac{Q}{40\pi\varepsilon_0} + \vec{a}_{R_3} \frac{Q}{56\pi\varepsilon_0} - \vec{a}_{R_4} \frac{Q}{24\pi\varepsilon_0} \\ &= (2.23\vec{a}_x - 0.88\vec{a}_y + 2.46\vec{a}_z) \times 10^9 Q \end{split}$$

式中
$$\vec{a}_{R_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}_x + \vec{a}_z), \ \vec{a}_{R_2} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3\vec{a}_x + \vec{a}_z), \ \vec{a}_{R_3} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + \vec{a}_z), \ \vec{a}_{R_4} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{a}_x + 2\vec{a}_y + \vec{a}_z).$$

### 静电场导体系统中的电容 例 2.9

上海交通大学



(2) 点电荷 Q 受到的电场力为

$$\begin{split} \vec{F} &= -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0(2x_0)^2} \vec{a}_x - -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0(2y_0)^2} \vec{a}_y + \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0(4x_0^2 + 4y_0^2)^2} (\frac{x_0\vec{a}_x + y_0\vec{a}_y}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}) \\ &= -\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0} \vec{a}_x - -\frac{Q^2}{16\pi\varepsilon_0} \vec{a}_y + -\frac{Q^2}{32\sqrt{2}\pi\varepsilon_0} (\vec{a}_x + \vec{a}_y) \\ &= -1.45 \times 10^9 Q^2 (\vec{a}_x + \vec{a}_y) \end{split}$$

(3) 水平和垂直接地导体平板上的感应面电荷密度 $\rho_s$ 和 $\rho_s$ 分别为

$$\begin{split} & \rho_s' \Big|_{y=0} = \varepsilon_0 E_y \Big|_{y=0} = \frac{2Qv_0}{4\pi} \left\{ \left[ y_0^2 + (x+x_0)^2 + z^2 \right]^{\frac{-3}{2}} - \left[ y_0^2 + (x-x_0)^2 + z^2 \right]^{\frac{-3}{2}} \right\} \\ & = \frac{Q}{2\pi} \left\{ \left[ 1 + (x+1)^2 + z^2 \right]^{\frac{-3}{2}} - \left[ 1 + (x-1)^2 + z^2 \right]^{\frac{-3}{2}} \right\} \\ & \rho_s' \Big|_{y=0} = \varepsilon_0 E_x \Big|_{y=0} = \frac{2Qx_0}{4\pi} \left\{ \left[ x_0^2 + (y+y_0)^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}} - \left[ x_0^2 + (y-y_0)^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\} \\ & = \frac{Q}{2\pi} \left\{ \left[ 1 + (y+1)^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \left[ 1 + (y-1)^2 + z^2 \right]^{\frac{3}{2}} \right\} \end{split}$$

据此,可进一步导出水平和垂直导体平板上的感应电荷 $Q_{in}$ 和 $Q_{in}$ "的值。 且容易证明 $Q_{in}$ ,+ $Q_{in}$  =  $Q_{in}$  = -Q。

上海交诵大学



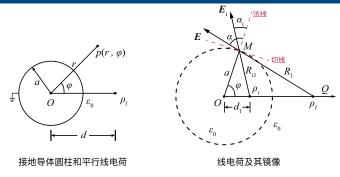


Figure 13: 无限长导体圆柱和平行线电荷

半径为 a 的无限长接地导体圆柱外有一根与之平行的无限长线电荷,设线电荷的电荷密度为  $\rho_l$ ,圆柱轴线与线电荷间的距离为 d,截面如上图所示。根据唯一性定理,导体圆柱外电位应满足条件: (1) 除  $\rho_l$  所在点外,空间中  $\nabla^2 V=0$ ; (2) 导体圆柱及无穷远处电位为 0。利用镜像法求接地导体圆柱外任一点  $p(r,\phi)$  处电位。

上海交通大学



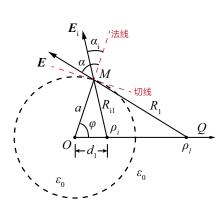
接地导体圆柱外任一点P处的电位:

$$V_{p} = -\frac{\rho_{l}}{2\pi\varepsilon_{0}} \ln R - \frac{\rho_{i}}{2\pi\varepsilon_{0}} \ln R_{i} + C$$

 $求\rho_i$ 与 $\rho_i$ ,  $d_i$ 与a,d之间的关系

原电荷与镜像电荷在M点处的电场强度

$$\begin{split} & \bar{E} = \frac{\rho_l \bar{a}_{R_l}}{2\pi\varepsilon_0 R_l}, \bar{E}_i = \frac{\rho_i \bar{a}_{R_{ll}}}{2\pi\varepsilon_0 R_{il}} \\ & E_\tau + E_{i\tau} = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0 R_l} \sin\alpha + \frac{\rho_i}{2\pi\varepsilon_0 R_{il}} \sin\alpha_i = 0 \\ & \Rightarrow \begin{cases} \rho_i = -\rho_l \\ d_i = \frac{a^2}{d} \end{cases} \stackrel{\text{id}}{\boxtimes} \begin{cases} \rho_i = -\rho_l \\ d_i = d \end{cases} ( \stackrel{\text{ch}}{\Longrightarrow} ) \end{split}$$



导体接地,表面电位为0,则
$$V_M = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\frac{R_{i1}}{R_1}) + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\frac{R_{i1}}{R_1})$$

上海交通大学



$$\begin{split} &W_e = W_{e1} + W_{e2} + W_{e3} = 0 + Q_2 \phi_{2,1} + Q_3 \left(\phi_{3,1} + \phi_{3,2}\right) \\ &W_e = W_{e1} + W_{e2} + W_{e3} = 0 + Q_2 \phi_{2,3} + Q_1 (\phi_{1,3} + \phi_{1,2}) \\ &2W_e = Q_1 (\phi_{1,3} + \phi_{1,2}) + Q_2 (\phi_{2,3} + \phi_{2,1}) + Q_3 (\phi_{3,1} + \phi_{3,2}) \\ &W_e = \frac{1}{2} (Q_1 \phi_1 + Q_2 \phi_2 + Q_3 \phi_3); \quad W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} Q_i \phi_i \\ &V = \frac{\rho_i}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\frac{R_i}{R} \frac{R_1}{R_{i1}}) = \frac{\rho_i}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\frac{R_i}{R} \frac{d}{a}) \end{split}$$

面电荷密度为:

$$\rho_{S} = -\varepsilon_{0} \frac{\partial V}{\partial r} \bigg|_{r=a} = -\frac{\rho_{l}(d^{2} - a^{2})}{2\pi a(d^{2} + a^{2} - 2ad\cos\varphi)}$$

感应电荷:

$$\int_{S} \rho_{S} dS = -\int_{0}^{1} dz \int_{0}^{2\pi} -\frac{\rho_{l} (d^{2} - a^{2}) d\varphi}{2\pi a (d^{2} + a^{2} - 2ad \cos \varphi)} = -\rho_{l}$$
 静电力:  $f = -\frac{\rho_{l}^{2} d}{2\pi \varepsilon_{0} (d^{2} - a^{2})}$ 

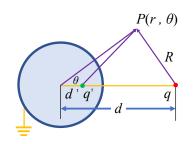
上海交诵大学



#### 讨论:

(1) 导体圆柱不接地也不带电

$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\frac{R_i}{R} \frac{d}{a}) + \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\frac{C_1}{r})$$



(2)导体圆柱不接地,单位长度带有电荷 $\rho_{l0}$ 

$$V = \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\frac{R_i}{R} \frac{d}{a}) + \frac{\rho_l}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\frac{C_1}{r}) + \frac{\rho_{l0}}{2\pi\varepsilon_0} \ln(\frac{a}{r})$$

## 静电场边值问题的解法 导体球和点电荷

上海交诵大学



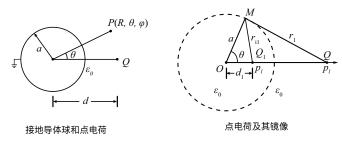


Figure 14: 接地导体球和点电荷

一半径为 a 接地导体球外有一电荷量为 Q 的点电荷,球心和点电荷间的距离为 d(d>a),求球外任一点的电位。

### 静电场边值问题的解法 导体球和点电荷

上海交诵大学



$$\begin{split} V &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} + \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r_i}; \quad V_M = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_i} + \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{i1}} = 0 \\ &[Q^2(a^2 + d_i^2) - Q_i^2(a^2 + d^2)] + 2a\cos\theta(Q_i^2 d - Q^2 d_i) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} Q_i &= -\frac{aQ}{d} \\ d_i &= \frac{a^2}{d} \end{cases} \\ &\not E$$
 按地导体球外任一点的电位为 
$$V &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon} (\frac{1}{r} - \frac{a}{dr}) \end{split}$$

$$\begin{array}{c|c} A & & & \\ & & & \\ & & & \\ O & & & \\ & & & \\ & & & \\$$

点电荷及其镜像

$$\rho_{S} = -\varepsilon_{0} \frac{\partial V}{\partial R} \bigg|_{R=a} = -\frac{Q(d^{2} - a^{2})}{4\pi a(a^{2} + d^{2} - 2ad\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\rho_S = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial R} \bigg|_{R=a} = -\frac{\mathcal{Q}(a-a')}{4\pi a(a^2 + d^2 - 2ad\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

$$Q_{lm} = \int_{S} \rho_{S} dS = -\frac{Q(d^{2} - a^{2})}{4\pi a} \int_{0}^{\pi} \frac{2\pi a^{2} \sin\theta d\theta}{\left(a^{2} + d^{2} - 2ad \cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{aQ}{d} = Q_{i} \qquad F = -\frac{(a_{d}^{\prime})Q^{2}}{4\pi \varepsilon_{0} (d - a_{d}^{\prime})^{2}} = -\frac{adQ^{2}}{4\pi \varepsilon_{0} (d^{2} - a^{2})^{2}}$$

#### 讨论: 导体球不接地不带电时

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i} + \frac{Q_i'}{4\pi\varepsilon_0 r_i'} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} (\frac{1}{r} - \frac{a}{dr_i} + \frac{a}{dR})$$



## 一无限大接地导体平面上有一半径为 a 的半球形导体凸块,此凸块附近有一点电荷。试确定此电荷的镜像电荷。

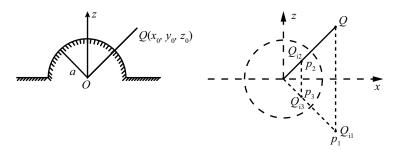


Figure 15: 例 2.10 题图



在无限大的理想接地导体平面上有一半径为半球形导体凸部,半球的球心在导体平面上,若在球的对称轴上距球心处放一点电荷,如 Figure 16 所示。

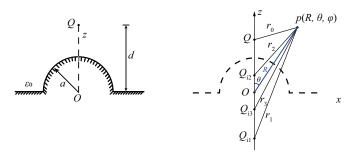


Figure 16: 例 2.11 题图

# 静电场边值问题的解法 镜像法总结

上海交诵大学



#### 镜像法的理论基础

静电场惟一性定理.

#### 镜像法的实质

用虚设的镜像电荷替代未知电荷的分布,使计算场域为无限大均匀媒质.

#### 镜像法的关键

确定镜像电荷的个数、大小及位置.

#### 镜像法注意事项

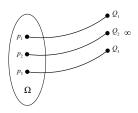
镜像电荷只能放在待求场域以外的区域。叠加时,要注意场的适用区域。



- 1 2.1 静电场方程
- 2 2.2 电位
- 3 2.3 介质中电场
- 4 2.4 电容

- 5 2.5 边界条件
- 6 2.6 边值问题
- 7 2.7 静电场能量
- 8 2.8 作业





$$\begin{split} W_e &= W_{e1} + W_{e2} + W_{e3} = 0 + Q_2 \phi_{2,1} + Q_3 \left( \phi_{3,1} + \phi_{3,2} \right) \\ W_e &= W_{e1} + W_{e2} + W_{e3} = 0 + Q_2 \phi_{2,3} + Q_1 (\phi_{1,3} + \phi_{1,2}) \\ 2W_e &= Q_1 (\phi_{1,3} + \phi_{1,2}) + Q_2 (\phi_{2,3} + \phi_{2,1}) + Q_3 (\phi_{3,1} + \phi_{3,2}) \\ W_e &= \frac{1}{2} (Q_1 \phi_1 + Q_2 \phi_2 + Q_3 \phi_3); \quad W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} Q_i \phi_i \end{split}$$

## 静电场的能量、能量密度及电场力 静电场的能量和密度能量

上海交通大学



#### 静电场的能量

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

#### 静电场的能量密度

$$w_e = \frac{1}{2}\vec{D} \cdot \vec{E}$$

#### 对于简单媒质

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon}$$

## 静电场的能量、能量密度及电场力 用虚位移法求电场力

**上海交诵大学** 



#### 虚位移法的理论基础是能量守恒定律

$$\Delta W_s = \Delta W + \Delta W_e$$

 $\Delta W_s$ : 外源供给系统的电场能量;

 $\Delta W_e$ : 系统储能的能量;

 $\Delta W$ : 导体或者系统填充的媒质因位移所做的机械功。

$$\Delta W = F_l \Delta l$$

$$F_l = \frac{\partial W_s}{\partial l} - \frac{\partial W_e}{\partial l}$$

### 虚位移法求电场力 导体所带电荷量不变

上海交诵大学



导体电荷量不变,则各导体未同外源连接, $\Delta W_s = 0$ ,则

$$F_l = -\frac{\partial W_e}{\partial l}|Q = Const.$$
 
$$\vec{F}_Q = -\nabla W_e$$

#### 物理意义

在所有导体所带电荷量保持不变的情况下,某一导体或系统媒质沿某方向受到的作用力大小,等于它沿此方向位移单位距离所引起的系统 电场能量的减少量。



在多导体系统中,导体 p 发生位移 dg 后,其功能关系为外源提供能量 = 静电能量增量 + 电场力所作功

$$dW = dW_e + fdq$$

对常电荷系统, 当右图开关 K 断开时:

$$0 = dW_e + f dg \Rightarrow -f dg = dW_e$$
 
$$f = \frac{\partial W_e}{\partial g}|_{q_k = Const.}$$

表示取消外源后, 电场力作功必须 靠减少电场中静电能量来实现。

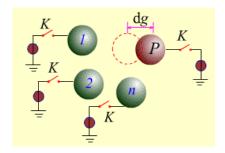


Figure 17: 多导体系统 (K 断开)

### 虚位移法求电场力 导体的电位不变

上海交诵大学



$$\Delta W_s = \sum_{i=1}^{n} V_i \Delta Q_i$$

$$\Delta W_e = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} V_i \Delta Q_i$$

$$F_l = \frac{\partial W_e}{\partial l} |_{V=const}$$

$$\overrightarrow{F_V} = \nabla W_e$$

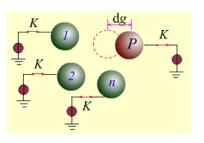
在所有导体电位不变的情况下,某一导体或系统填充媒质沿某个 方向受到作用力的大小,等于它沿此方向位移单位距离所引起的系统 电场能量的增量。

### 虚位移法求电场力 导体的电位不变

**上海交诵大学** 



#### 常电位系统 (K 闭合) 后, 外源提供能量的增量



$$dW = \sum \varphi_k dq_k$$
 
$$\sum \varphi_k dq_k = \frac{1}{2} \varphi_k dq_k + f dg$$

Figure 18: 多导体系统 (K 闭合)

说明:外源提供的能量有一半用于静电能量的增量,另一半用于电场力做功。

$$f = -\frac{\partial W_e}{\partial g}|_{\varphi_k = Const.}$$



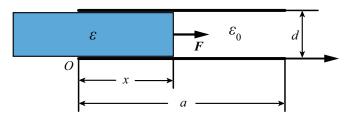


Figure 19: 例 2.12 题图: 部分填充介质块的平行板电容器

宽度 a, 长度 I, 板间距离 d。介质块: x,  $\varepsilon$ , 空气 a-x, 试计算介质 块单位面积受到的电场力。



解: 方法I: 假设两极板间电压不变, 电容器储能为

$$W_{e} = \frac{1}{2}(C_{1} + C_{2})U^{2} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon lx}{d}U^{2} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_{0}l(a-x)}{d}U^{2}$$

设有一沿x方向的外力,使介质块产生虚位移,则

$$\overrightarrow{F_U} = \overrightarrow{a_x} F_x = \overrightarrow{a_x} \frac{\partial W_e}{\partial x} \Big|_{U=const} = \frac{lU^2}{2d} \frac{\partial}{\partial x} [\varepsilon x + \varepsilon_0 (a - x)] \overrightarrow{a_x}$$

$$= \frac{lU^2 (\varepsilon - \varepsilon_0)}{2d} \overrightarrow{a_x} = \frac{E^2 ld}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0) \overrightarrow{a_x}$$

于是,介质块单位面积受到的电场力为

$$\overrightarrow{f_U} = \frac{\overrightarrow{F_U}}{ld} = \frac{1}{2}E^2(\varepsilon - \varepsilon_0)\overrightarrow{a_x}$$



解:方法II:假设保持两极板上的总电荷量Q不变。在电容器内

$$E_1 = \frac{\rho_{S1}}{\varepsilon}$$
,  $E_2 = \frac{\rho_{S2}}{\varepsilon_0}$ , 在分界面上,应有 $E_1 = E_2 = E$ 。于是,极板上

总电荷量为:

$$Q = \rho_{S2}xl + \rho_{S1}(a-x)l = [\varepsilon E_2x + \varepsilon_0 E_1(a-x)]l = E[\varepsilon x + \varepsilon_0(a-x)]l$$

$$E = \frac{Q}{[\varepsilon x + \varepsilon_0(a - x)]l}, \quad U = Ed = \frac{Qd}{[\varepsilon x + \varepsilon_0(a - x)]l}$$

$$W_e = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2 d}{[\varepsilon x + \varepsilon_0(a - x)]l}$$

$$\overrightarrow{F_{Q}} = -\overrightarrow{a_{x}} \frac{\partial W_{e}}{\partial x} |_{Q = const} = \frac{Q^{2}d}{2l} \frac{\varepsilon - \varepsilon_{0}}{[\varepsilon x + \varepsilon_{0}(a - x)]^{2}} \overrightarrow{a_{x}} = \frac{E^{2}ld}{2} (\varepsilon - \varepsilon_{0}) \overrightarrow{a_{x}}$$

$$\overline{f_U} = \frac{\overline{F_Q}}{ld} = \frac{1}{2}E^2(\varepsilon - \varepsilon_0)\overline{a_x}$$

### 虚位移法求电场力 例 2.12

上海交通大学



#### 解:方法 |||

边界条件: 
$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = E$$

$$w_{e1} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2, w_{e2} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

$$W_{eii} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 x l d + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (a - x) l d$$

$$W_{eii} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 (x + \Delta x) l d + \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 (a - x - \Delta x) l d$$

$$\Delta W = W_{eii} - W_{eii} = F_x \Delta x = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0) \Delta x E^2 l d$$

$$\vec{F}_x = \frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0) E^2 l d \vec{a}_x$$

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}_x}{l d} = -\frac{1}{2}(\varepsilon - \varepsilon_0) E^2 \vec{a}_x$$





- 1 2.1 静电场方程
- 2 2.2 电位
- 3 2.3 介质中电场
- 4 2.4 电容

- 5 2.5 边界条件
- 6 2.6 边值问题
- 7 2.7 静电场能量
- 8 2.8 作业





## 感谢聆听!

主讲人: 何广强

地址: 上海交通大学

电子工程系

邮箱: gqhe@sjtu.edu.cn 主页: qnp.sjtu.edu.cn

