第四章 静磁场

何广强

上海交通大学电子工程系量子非线性光子学实验室

目录

目录

静磁场是由恒定电流（或永久磁铁）建立的磁场。

主要内容：

1. 真空中静磁场的基本方程；
2. 静磁场的矢量磁位及其方程；
3. 磁介质中的静磁场；
4. 静磁场的边界条件；
5. 电感；
6. 静磁场的能量、能量密度及磁场力

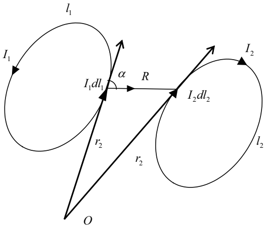
目录

真空中静磁场的基本方程

毕奥—萨伐尔定律与磁通量密度

右图中示出真空中两个载直流分别为 I_1 和 I_2 的回路 l_1 和 l_2，安培总结出的回路 l_1 对回路 l_2 的作用力 $\vec{F}_{21}$ 用下式表示：

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_2} \oint_{l_1} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times (I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R)}{R^2} \quad N \tag{1}$$



此式称为**安培力定律**。其中 $d\vec{l}_1$，$d\vec{l}_2$ 各代表两个导线回路上的长度微元矢量，$\vec{R} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$，代表自 $d\vec{l}_1$ 到 $d\vec{l}_2$ 的距离矢量，且 $R = |\vec{R}|$，常数 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$H/m，称为真空的导磁率。是不同于库仑力的另一种力，$\vec{F}_{21}$ 称为磁场力 (简称为磁力)。

真空中静磁场的基本方程

毕奥—萨伐尔定律与磁通量密度

为导出毕奥—萨伐尔定律，将式1改写成

$$\vec{F}_{21} = \oint_{l_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R}{R^2}\right) = \oint_{l_2} I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1 \qquad (2)$$

式中

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{a}_R}{R^2} \quad \mathrm{T} \qquad (3)$$

其大小 B_1 为

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l_1} \frac{I_1 dl_1 \sin\alpha}{R^2} \qquad (4)$$

而 α 是 $I_1 d\vec{l}_1$ 与 $\vec{a}_R$ 之间小于 180° 的夹角。$\vec{B}_1$ 可视为回路 $\vec{l}_1$ 作用于回路 $\vec{l}_2$ 的单位电流元（$|I_2 d\vec{l}_2| = 1\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}$）上的磁场力，它是表征电流回路 l_1 在其周围建立磁场特性的一个基本物理量，称为**磁通量密度 (或磁感应强度)**，其单位是特斯拉（T)。

一般地，当载流导体置于外磁场 $\vec{B}$ 中时，导体所受的磁场力为

$$\vec{F} = \oint_l I d\vec{l} \times \vec{B} \tag{5}$$

因 $Id\vec{l} = Jsd\vec{l} = \vec{J}dv$ （s 为导体截面积)，则上式可表示为

$$\vec{F} = \int_v \vec{J} \times \vec{B} dv \tag{6}$$

这是安培力定律的一般形式。若在上式中用 $\vec{J}_s ds$ 代替 $\vec{J}dv$，则可得分布于曲面 s 上的面电流在外磁场中所受磁力的表达式。

真空中静磁场的基本方程

毕奥—萨伐尔定律与磁通量密度

若运动速度为 v（$v \lll c$，c 为真空中的光速），电荷密度为 ρ 的体电荷在磁通量密度为 $\vec{B}$ 的磁场中运动，则电荷 dQ 微元所受的磁力为

$$\vec{F} = \vec{v} dQ \times \vec{B} \tag{7}$$

显然，上式对点电荷 Q 在磁场中运动所受的磁力同样适用。

若电流以体密度 $\vec{J}$ 分布在体积 v 内或以面密度 $\vec{J}_s$ 分布于曲面 s 上，则体电流及面电流在真空或自由空间中产生的磁通量密度分别为

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{J} \times \vec{R}}{R^3} dv \tag{8}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_s \frac{\vec{J}_s \times \vec{R}}{R^3} ds \tag{9}$$

磁通量定义为：磁通量密度对一个曲面的面积分称为磁通量密度穿过此曲面的通量，简称为**磁通量**，记为 Φ。即

$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad \mathrm{Wb} \tag{10}$$

显然，若磁通量密度与曲面的表面相切，则穿过此曲面的磁通量一定为零。

真空中静磁场的基本方程

磁通量与磁通连续性原理

因为自然界中磁体的南北极不能分开，因此由磁体北极出发的磁通量线（磁力线）的条数应正好等于进入南极的磁力线的条数，这表明磁力线永远是闭合的。换言之，穿过任一封闭曲面的磁通量恒等于零。即

磁通连续性原理的积分形式 / 磁的高斯定理（积分形式）

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0 \tag{11}$$

真空中静磁场的基本方程

磁通量与磁通连续性原理

将上式左端利用散度定理，可得

磁通连续性原理的微分形式

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \tag{12}$$

由于 $\vec{B}$ 的散度永远为零，因此磁场是**无散场**或称**管形场。**
上述方程是**麦克斯韦方程组**中的四个方程之一。

真空中静磁场的基本方程

安培环路定律与磁场强度

安培环路定律叙述为：真空中，磁通量密度沿任一封闭曲线 l 的线积分等于此封闭曲线 l 所包围的电流，即

$$\oint_l \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}\right) \cdot d\vec{l} = I \tag{13}$$

或

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \tag{14}$$

真空中静磁场的基本方程

安培环路定律与磁场强度

类似于静电场中电通量密度 $\vec{D}$ 的定义，将真空或自由空间中的磁场强度 $\vec{H}$ 定义为：

$$\vec{H} = \frac{\vec{\vec{B}}}{\mu_0} A/m \tag{15}$$

是磁场的一个导出物理量。应指出，$\vec{H}$ 对简单媒质，$\vec{H} = \vec{B}/\mu$ 其中 μ 为简单媒质的导磁率。于是

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \tag{16}$$

这是安培于 1823 年基于试验导出的安培环路定律的积分形式。

真空中静磁场的基本方程

安培环路定律与磁场强度

若封闭曲线 l 所包围的电流是以体电流密度 $\vec{J}$ 分布的，将式 (17) 右端用体电流密度 $\vec{J}$ 的面积分表示，有

$$\oint_l \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_s \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{17}$$

再将等号左端的线积分利用斯托克斯定理化为面积分，得

$$\int_s (\nabla \times \vec{H}) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_s \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s} \tag{18}$$

由于曲面 S 是闭曲线 l 所包围的任意开曲面，因此，必有

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \tag{19}$$

这是**安培环路定律的微分形式**，它说明磁场存在旋涡源 $\vec{J}$。

真空中静磁场的基本方程

静磁场基本方程

1. 磁通连续原理

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

证明:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_l \frac{I d\vec{l} \times \vec{a}_R}{R^2} d\vec{S} = \oint_l \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi} \cdot \oint_S \frac{\vec{a}_R \times d\vec{S}}{R^2}$$

$$= \oint_l \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi} \cdot \oint_S -\nabla(\frac{1}{R} \times d\vec{S}) = \oint_l \frac{\mu_0 I d\vec{l}}{4\pi} \cdot \int_V \nabla \times \nabla(\frac{1}{R})dV = 0$$

旋度定理: $\oint_V \nabla \times \vec{A} dV = -\oint_S \vec{A} \times d\vec{S} = 0$

真空中静磁场的基本方程

静磁场基本方程

2. 安培环路定律

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

物理意义：磁通量密度为无散场，磁力线总是闭合曲线。

目录

静磁场的矢量磁位及其方程

磁矢位 A 的引出

由

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \nabla \times \vec{A} \equiv 0 \rightarrow \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

定义 $\vec{A}$ 为**矢量磁位**，单位为 Wb/m（韦伯每米）。

磁矢势与电势可以共同用来设定电场与磁场。许多电磁学的方程可以以电场与磁场写出，或者以磁矢势与电势写出。

静磁场的矢量磁位及其方程

上海交通大学

磁矢位 A 的引出

由毕奥—萨伐尔定律导出矢量磁位：

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}\times\vec{a_R}}{R^2}dV' = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}[\nabla(\frac{1}{R})\times\vec{J}]dV' = \nabla\times[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}}{R}dV']$$

体电流： $$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}}{R}dV'$$

面电流： $$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'}\frac{\vec{J_S}}{R}dS'$$

线电流： $$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{l'}\frac{I\vec{dl'}}{R}$$

$$\Phi = \int_S \vec{B}\bullet\vec{dS} = \int_S(\nabla\times\vec{A})\bullet\vec{dS} = \oint_l \vec{A}\bullet\vec{dl}$$

静磁场的矢量磁位及其方程

矢量磁位方程

从基本方程出发：

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad \rightarrow \quad \nabla \times \vec{B}/\mu = \frac{1}{\mu}\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \vec{J}$$

由矢量运算：

$$\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J}$$

取库仑规范（Coulomb' s gauge) $\nabla \cdot \vec{A} = 0$：

矢量泊松方程

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}$$

矢量拉普拉斯方程

$$\nabla^2 \vec{A} = 0$$

静磁场的矢量磁位及其方程

例 4-1

求沿 z 轴放置，长为 $2l$ ，载直流为 I 的直导线在 xOy 平面上任一点 P 处的矢量磁位，并导出 $l \to \infty$ 情况下 P 处的矢量磁位及磁通量密度。

分析：I，z向，A_z，

解：(1) $\vec{A} = \vec{a_z} A_z = \vec{a_z} \dfrac{\mu_0 I}{4\pi} \displaystyle\int_{-l}^{l} \frac{dz}{R}$

$$= \vec{a_z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-l}^{l} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$= \vec{a_z} \frac{\mu_0 I}{4\pi} [\ln(l + \sqrt{l^2 + r^2}) - \ln(\sqrt{l^2 + r^2} - l)]$$

$$l >> r, l + \sqrt{l^2 + r^2} \approx 2l, \sqrt{l^2 + r^2} - l \approx \frac{r^2}{2l}, \vec{A} = \vec{a_z} \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(\frac{2l}{r})$$

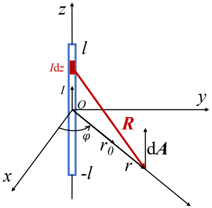


Figure 1: 例 4-1 题图

静磁场的矢量磁位及其方程

例 4-1

$$(2)\vec{A}=\vec{a_z}\{\lim_{l\to\infty}\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-l}^{l}[\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{r_0{}^2+z^2}}]dz\}$$

$$=\vec{a_z}\{\lim_{l\to\infty}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln[\frac{(\frac{z}{r})+\sqrt{1+(\frac{z}{r})^2}}{(\frac{z}{r_0})+\sqrt{1+(\frac{z}{r_0})^2}}]\Big|_0^l\}=\vec{a_z}\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln(\frac{r_0}{r})$$

p点： $$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}=-\vec{a_\varphi}\frac{\partial A_z}{\partial r}=\vec{a_\varphi}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

静磁场的矢量磁位及其方程

例 4-2

试求有限长直载流导线产生的磁感应强度

解：采用圆柱坐标系，取电流Idz

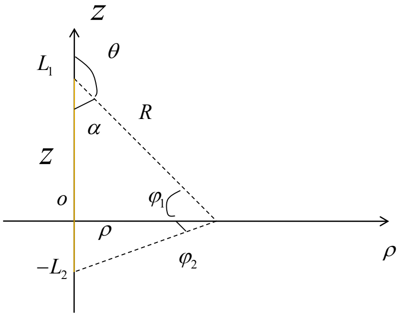
$$\vec{B}=\frac{u_0}{4\pi}\int_L \frac{Id\vec{l}\times\vec{e_R}}{R^2} \quad \text{式中}\ R^2=\rho^2+z^2$$

$$d\vec{l}\times\vec{e_R}=dz\sin\theta\vec{e_\phi}=dz\sin\alpha\vec{e_\phi}=\frac{\rho}{R}dz\vec{e_\phi}$$

$$B_\phi=\frac{u_0}{4\pi}\int_{L_2}^{L_1}\frac{I\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}dz$$

$$=\frac{u_0 I}{4\pi\rho}\left[\frac{L_1}{\sqrt{\rho^2+L_1^2}}+\frac{L_2}{\sqrt{\rho^2+L_2^2}}\right]$$

$$=\frac{u_0 I}{4\pi\rho}(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2)$$

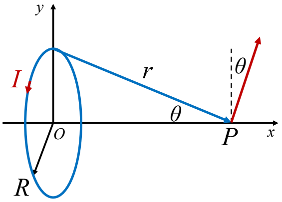


当$L_1\to\infty, L_2\to\infty, \vec{B}=\frac{u_0 I}{2\pi\rho}\vec{e_\phi}$

静磁场的矢量磁位及其方程

例 4-3

真空中有一载流为 I，半径为 R 的圆环，试求其轴线上 P 点的磁感应强度 B 。



解：元电流 Idl 在 P 点产生的 B 为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{e}_r}{4\pi r^2} \qquad (I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \perp \boldsymbol{e}_r)$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I\mathrm{d}\boldsymbol{l} \sin\frac{\pi}{2}}{4\pi(R^2+x^2)}$$

根据圆环电流对 *P* 点的对称性，

$$\mathrm{d}B_x = \mathrm{d}B\sin\theta \qquad \mathrm{d}B_y = 0$$

$$\sin\theta = R/r$$

静磁场的矢量磁位及其方程

例 4-2

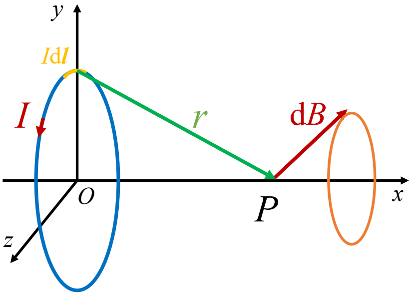
$$\mathrm{d}B_x = \frac{\mu_0 I \mathrm{dl} \sin\frac{\pi}{2}}{4\pi(R^2 + x^2)} \sin\theta$$

$$\mathrm{B} = B_x \mathrm{e}_x$$

$$= \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi(R^2 + x^2)} \sin\theta \oint_l \mathrm{dl}\right] \mathrm{e}_x$$

$$= \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi(R^2 + x^2)} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} \cdot 2\pi R\right] \mathrm{e}_x$$

$$= \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \mathrm{e}_x$$



圆形载流回路轴线上的磁场分布

静磁场的矢量磁位及其方程

例 4-4

无限大导体平面通有面电流 $K = Ke_z$，试求磁感应强度 B 分布。

解：取宽度 dx 的一条无限长线电流

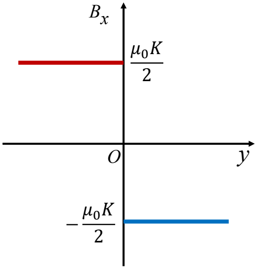


Figure 2: 例 4-3 题图

$$dB_x = \frac{\mu_0 K dx}{2\pi\rho}\cos\alpha = \frac{\mu_0 K dx}{2\pi\rho}\cdot\frac{y}{\rho}$$

$$= \frac{\mu_0 K y dx}{2\pi(x^2+y^2)}$$

根据对称性，$By = 0$

$$B_x = -\frac{\mu_0 K y}{2\pi}\int_{-infty}^{+infty}\frac{dx}{(x^2+y^2)}$$

$$\vec{B} = \begin{cases} -\frac{\mu_0 K}{2}\vec{e_x}, & y > 0 \\ \frac{\mu_0 K}{2}\vec{e_x}, & y < 0 \end{cases}$$

目录

磁偶极子是指半径很小的圆形平面载流回路。b，I 位于 xOy 平面，中心与坐标原点重合。求空间任一点 p 处的 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$。

分析：选择球坐标系，I 关于 z 轴旋转对称，只有 A_ϕ 分量。$A_\phi(R,\theta)$。
根据 A_ϕ 特点，假设 p 点位于 xOz 平面，且远离载流圆环。

解：$\phi : Id\vec{l_1}$; $-\phi : Id\vec{l_2}$
$dl_1 = dl_2 = dl = bd\phi$
$p(R,\theta,0^\circ)$, $\quad d\vec{A}_1 \parallel d\vec{l_1}; d\vec{A}_2 \parallel d\vec{l_2}$

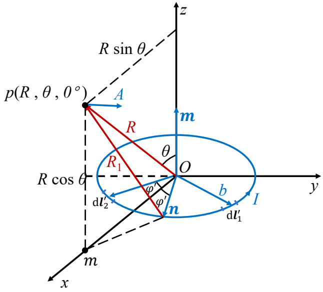


Figure 3: 磁偶极子

磁介质中的静磁场

磁偶极子

$$\overrightarrow{dA_1} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\overrightarrow{dl_1}}{R_1} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi R_1}(-\overrightarrow{a_x}\sin\varphi + \overrightarrow{a_y}\cos\varphi)$$

$$\overrightarrow{dA_2} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi R_1}(\overrightarrow{a_x}\sin\varphi + \overrightarrow{a_y}\cos\varphi)$$

$$\overrightarrow{dA} = \overrightarrow{dA_1} + \overrightarrow{dA_2} = \frac{\mu_0 Ib}{2\pi R_1}\cos\varphi d\varphi \overrightarrow{a_y}$$

$$\vec{A} = \overrightarrow{a_y}\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\cos\varphi}{R_1}d\varphi$$

$$= \overrightarrow{a_y}\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\int_0^\pi \frac{1}{R}(1+\frac{b}{R}\sin\theta\cos\varphi)\cos\varphi d\varphi$$

$$= \overrightarrow{a_y}\frac{\mu_0 I\pi b^2}{4\pi R^2}\sin\theta = \overrightarrow{a_y}\frac{\mu_0 IS}{4\pi R^2}\sin\theta = \frac{\mu_0 \vec{m}\times\overrightarrow{a_R}}{4\pi R^2}$$

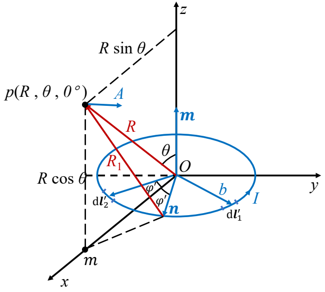


Figure 4: 磁偶极子

磁偶极矩：

$$\vec{m} = I\vec{S}$$

方向与电流成 I **右手螺旋关系。**

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0 m}{4\pi R^3}(\vec{a}_R 2\cos\theta + \vec{a}_\theta \sin\theta)$$

磁偶极子的磁力线与电偶极子的电力线分布形状外部相同，内部不同。

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3}(\vec{a}_R 2\cos\theta + \vec{a}_\theta \sin\theta)$$

磁介质中的静磁场

介质的磁化

磁偶极子 (magnetic dipole) 和磁偶极矩 (magnetic dipole moment)

$$\vec{m} = Id\vec{S} \quad Am^2$$

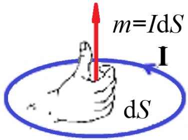


Figure 5: 磁偶极子

介质的磁化

无外磁场作用时，介质对外不显磁性

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i = 0$$

在外磁场作用下，磁偶极子发生旋转，

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i \neq 0$$

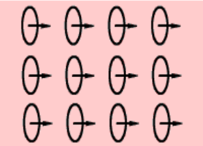


Figure 6: 介质的磁化

磁介质中的静磁场

介质的磁化

转矩为 $T_i = \vec{m}_i \times \vec{B}$，旋转方向使磁偶极矩方向与外磁场方向一致，对外呈现磁性，称为**磁化现象。**

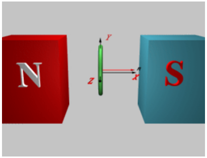


Figure 7: 磁偶极子受磁场力而转动

磁化强度：

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i}{\Delta V} \quad (\mathrm{A/m})$$

体磁化电流：$\vec{J}_m = \nabla \times \vec{M}$；

面磁化电流：$\vec{K}_m = \vec{M} \times \vec{e}_n$；

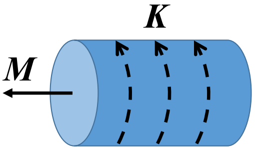
磁介质在外部磁场的作用下会产生磁化现象:

- 有磁介质存在时，场中的 $\mathbf{B}$ 是自由电流和磁化电流共同作用，在真空中产生的。
- 磁化电流具有与传导电流相同的磁效应。
- 磁化的磁介质中的磁场由外磁场和由分子电流产生的磁场叠加而成。

磁介质中的静磁场

介质的磁化

算例：判断磁化电流的方向。



推导过程：

$$d\vec{A}=\frac{\mu_0\vec{M}\times\vec{a}_R}{4\pi R^2}dV'=\frac{\mu_0\vec{M}\times\nabla'(1/R)}{4\pi}dV'$$

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\vec{M}\times\nabla'(1/R)dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\vec{M}}{R}dV'-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\nabla'\times(\frac{\vec{M}}{R})dV'$$

$$=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\vec{M}}{R}dV'+\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}(\frac{\vec{M}\times\vec{a}_n}{R})dS'$$

磁介质中的静磁场

介质的磁化

磁化强度：单位体积内分子电流磁偶极矩的矢量和。

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^{n} \vec{m}_i$$

束缚体电流密度：$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}_i$ 束缚面电流密度：$\vec{J}_{bs} = \vec{M} \times \vec{a}_n$

推导过程：

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{M} \times \vec{a}_R}{4\pi R^2} dV' = \frac{\mu_0 \vec{M} \times \nabla'(1/R)}{4\pi} dV'$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \vec{M} \times \nabla'(1/R) dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \vec{M}}{R} dV' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \nabla' \times (\frac{\vec{M}}{R}) dV'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\nabla' \times \vec{M}}{R} dV' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} (\frac{\vec{M} \times \vec{a}_n}{R}) dS'$$

磁介质中的静磁场

介质的磁化

磁化的磁介质中的磁场由传导电流产生的外磁场和磁化电流产生的磁场叠加。

安培环路定路的微分形式：

$$\nabla\times\vec{B}=\mu_0(\vec{J}+\vec{J}_b)$$

$$\nabla\times\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}\right)=\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$$

积分形式：

$$\oint_l\vec{H}\bullet d\vec{l}=I$$

$\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$：磁场强度。

$$\vec{B}=\mu_0(\vec{H}+\vec{M})$$

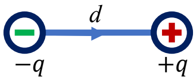
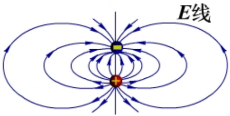
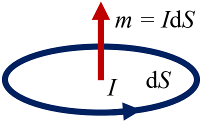
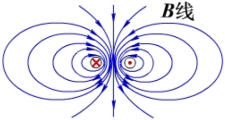
在线性、各向同性媒质中，$\vec{M}=\chi_m\vec{H}$。

$$\vec{B}=\mu_0(1+\chi_m)\vec{H}=\mu_0\mu_r\vec{H}=\mu\vec{H}$$

真空μ_r=1；顺磁：$\mu_r>1$;抗磁：$\mu_r<1$；铁磁：$\mu_r>>1$。

磁介质中的静磁场

磁偶极子与电偶极子对比

	模 型	极化与磁化	电场与磁场
电偶极子	 $\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{d}$	$\rho_p = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}$ $\sigma_p = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$	
磁偶极子	 $\boldsymbol{m} = I\mathrm{d}\boldsymbol{S}$	$J_\mathrm{m} = \nabla\times\boldsymbol{M}$ $J_{bs} = \boldsymbol{M}\times\vec{a}_\mathrm{n}$	

磁介质中的静磁场

上海交通大学

例 4-4

真空中，长 l，半径为 a 均匀磁化的圆柱形磁棒沿 z 放置。磁化强度 $\vec{M} = \vec{a}_z M_0$，求磁棒外轴线上点 p(0,0,z) 处的 $\vec{B}$。

解：$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M} = 0$

$$\vec{J}_{bs} = \vec{M} \times \vec{a}_n = 0$$

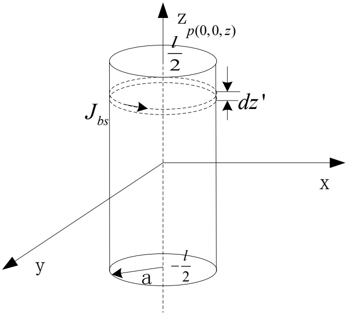
$$\vec{J}_{bs} = \vec{M} \times \vec{a}_n = M_0 \vec{a}_z \times \vec{a}_r = M_0 \vec{a}_\varphi$$

$$dI_b = J_{bs} dz' = M_0 dz'$$

$$d\vec{B} = \vec{a}_z \frac{\mu_0 M_0 a^2 dz'}{2[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}}$$

$$\vec{B} = \vec{a}_z \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\mu_0 M_0 a^2 dz'}{2[(z-z')^2 + a^2]^{3/2}}$$

$$= \vec{a}_z \frac{\mu_0 M_0}{2} \left[\frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{(\frac{l}{2} + z)^2 + a^2}} + \frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{(\frac{l}{2} - z)^2 + a^2}} \right]$$



目录

静磁场的边界条件

$\vec{B}$ 和 $\vec{H}$ 的边界条件

$$\vec{a}_n \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0, \quad B_{1n} = B_{2n}$$

$$\vec{a}_n \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s, \quad H_{1t} - H_{2t} = \vec{J}_s$$

$\vec{A}$ 的边界条件

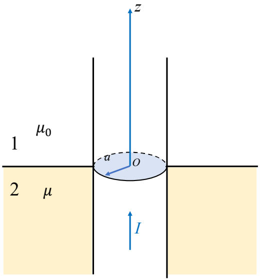
$$\vec{a}_n \cdot (\nabla \times \vec{A}_1 - \nabla \times \vec{A}_2) = 0$$

$$\vec{a}_n \times (\frac{1}{\mu_1}\nabla \times \vec{A}_1 - \frac{1}{\mu_2}\nabla \times \vec{A}_2) = \vec{J}_s$$

静磁场的边界条件

例 4-5

一半径为 a，通有电流为 I 的无限长的直导线，其下部分垂直埋入导磁率为 μ 的均匀磁介质中。求在空气和磁介质的两个区域中磁感应强度 B 和磁场强度以及各分界面处的束缚面电流密度。



解：空气中: $\oint_l \vec{H}\bullet d\vec{l} = I,\ \vec{H}_1 = (\frac{I}{2\pi r})\vec{a}_\varphi$

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \vec{H}_1 = (\frac{\mu_0 I}{2\pi r})\vec{a}_\varphi$$

磁介质中：$\vec{H}_2 = (\frac{I}{2\pi r})\vec{a}_\varphi,\ \vec{B}_2 = (\frac{\mu I}{2\pi r})\vec{a}_\varphi$

磁化强度: $\vec{M} = \frac{\vec{B}_2}{\mu_0} - \vec{H}_2 = \frac{I}{2\pi r}(\mu_r - 1)\vec{a}_\varphi$

导体与介质的分界面, 束缚面电流密度:

$$\vec{J}_{bs} = (\vec{M}\times\vec{a}_n)\big|_{r=a} = \vec{a}_\varphi \frac{I}{2\pi r}(\mu_r - 1)\times(-\vec{a}_r)\big|_{r=a} = \frac{I}{2\pi a}(\mu_r - 1)\vec{a}_z$$

空气与介质的分界面上

$$\vec{J}_{bs} = (\vec{M}\times\vec{a}_n)\big|_{z=0} = \vec{a}_\varphi \frac{I}{2\pi r}(\mu_r - 1)\times\vec{a}_z = \frac{I}{2\pi r}(\mu_r - 1)\vec{a}_r$$

目录

电感

在恒定电流产生的静磁场中，穿过导体系统的磁链与产生该磁链的电流之比为导体的电感，电感分为自感和互感。

自感

回路的电流与该回路交链的磁链的比值称为自感。

若导体回路有 N 匝线圈绕成，磁链为各匝导线回路的磁通量之和。

若各匝导线密绕：$\Psi = N\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$

线性介质：$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_l \frac{Id\vec{l}\times\vec{a}_R}{R^2}$，$L = \frac{\Psi}{I}\mathrm{H}$ 亨利

自感 L 的大小取决于回路的尺寸，形状，导磁率，与电流无关。

电感

自感

定义外磁链 Ψ_o 和内磁链 Ψ_i
进而有外自感 L_o 和内自感 L_i

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{\Psi_o}{I} + \frac{\Psi_i}{I} = L_o + L_i$$

内磁链:

$$\Psi_i = \int_S \frac{I_i}{I} d\Psi_i$$

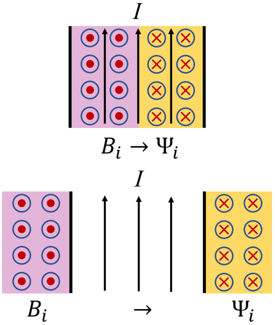


Figure 8: 内磁链与外磁链

求自感的一般步骤:

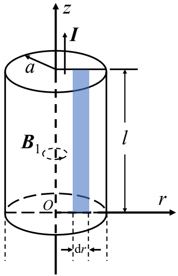
$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[dr] & \boldsymbol{H} \arrow[r] & \boldsymbol{B} \arrow[r] & \Phi \arrow[r] & L\ (L_i, L_o) \\ & \boldsymbol{A} \arrow[urr] & & & \end{tikzcd}$$

电感

例 4.6

求半径为 a 的无限长直导线的单位长度自感

解：取圆柱坐标系，设电流 I 沿 z 方向流动导线内部距轴线为 r 处得磁通量密度为



$$\vec{B}_i = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\vec{a}_\varphi$$

$$d\Phi_i = B_i dS = B_i l dr, I_i = I\,\pi r^2/\pi a^2 = I\,r^2/a^2$$

$$d\Psi_i = \frac{I_i}{I} d\Phi_i = \frac{\mu_0 r^3 l I}{2\pi a^4} dr$$

$$\Psi_i = \int_S d\Psi_i = \int_0^a \frac{\mu_0 r^3 l I}{2\pi a^4} dr = \frac{\mu_0 l I}{8\pi}$$

$$L_{iu} = \frac{\Psi_i}{lI} = \frac{\mu_0}{8\pi}$$

电感

例 4.7

试求图示长为 l 的同轴电缆的自感 L。

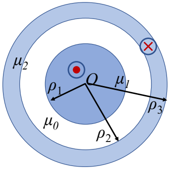


Figure 9: 例 4.7 题图

解：1. 求内导体的内自感 $(0 \leq \rho \leq \rho_l)$。

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I' = \frac{I}{\rho_1^2}\rho^2 = \frac{I}{\rho_1^2}\rho^2$$

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho_1^2}\rho$$

匝数 $N = \frac{I'}{I} = \frac{\rho^2}{\rho_1^2}$

磁通量为 $d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho_1^2}\rho l d\rho$

$$\therefore \Psi_{i1} = \int_S N d\psi = \int_0^{\rho_1} \frac{\mu_0 I l \rho}{2\pi\rho_1^2}\frac{\rho^2}{\rho_1^2} d\rho = \frac{\mu_0 I l}{8\pi}$$

内自感 $L_{i1} = \Psi_{i1}/I = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$

电感

例 4.7

2. 求外导体的内自感 ($\rho_2 \le \rho \le \rho_3$)。

$$B = \frac{I'\mu_0}{2\pi\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}$$

$$d\Phi_{i2} = BdS = B\cdot ld\rho$$

$$\text{匝数：}\ N = \frac{I'}{I} = \frac{\rho_3^2 - \rho^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}$$

$$L_{i2} = \frac{1}{I}\int_{\rho_2}^{\rho_3} NBld\rho$$

$$= \frac{\mu_0 l}{2\pi}\left(\frac{\rho_3^2}{\rho_3^2 - \rho_2^2}\right)^2 \ln\frac{\rho_3}{\rho_2} - \frac{\mu_0 l\rho_3^2}{2\pi(\rho_3^2 - \rho_2^2)} + \frac{\mu_0 l\rho_3^2 + \rho_2^2}{8\pi(\rho_3^2 - \rho_2^2)}$$

电感

例 4.7

2. 求外自感 $(\rho_1 \leq \rho \leq \rho_2)$。

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

$$d\Psi_o = d\Phi_o = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} l d\rho$$

$$L_0 = \frac{\Psi_o}{I} = \frac{1}{I}\int_{\rho_1}^{\rho_2} (\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} l d\rho = \frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{\rho_2}{\rho_1}$$

总自感:

$$L = L_o + L_{i1} + L_{i2}$$

例 4.8

试求半径为 R 的两平行传输线自感。

解：

内自感 $L_i = \frac{\mu_0 l}{8\pi}$，总自感 $L = 2L_i + L_o$

由 $B \to L_0$，

设 $I \to B = \frac{I\mu_0}{2\pi x} + \frac{I\mu_0}{2\pi(D-x)} \to$

$$\Psi = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\int_R^{D-R}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{D-x}\right)l\,dx = \frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\frac{D-R}{R}$$

$$L_o = \frac{\Psi}{I} = \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{D-R}{R}$$

总自感为：

$$L = 2L_i + L_o = \frac{\mu_0 l}{4\pi} + \frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{D-R}{R}$$

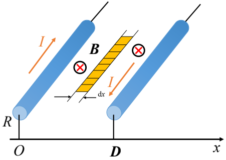
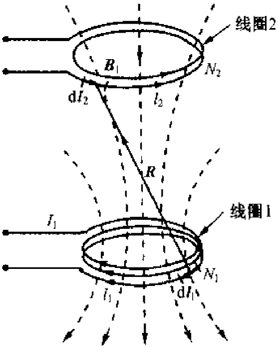


Figure 10: 例 4.8 题图

电感

互感



线圈1对线圈2的互感: $L_{21}=\dfrac{\Psi_{21}}{I_1}$

线圈2对线圈1的互感:

$$L_{12}=\frac{\Psi_{12}}{I_2}=L_{21}=M$$

若线圈1通有电流I_1，线圈2开路。

穿过线圈2的总磁链为

$$\Psi_{21}=N_2\int_{S_2}\vec{B}_1\bullet d\vec{S}_2=N_2\int_{S_2}(\nabla\times\vec{A}_1)\bullet d\vec{S}_2$$

$$=N_2\int_{l_2}\vec{A}_1\bullet d\vec{l}_2$$

$$\vec{A}_1=\frac{\mu_0 N_1 I_1}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{d\vec{l}_1}{R},\Psi_{21}=\frac{\mu_0 N_1 N_2 I_1}{4\pi}\oint_{l_1}\int_{l_2}\frac{d\vec{l}_1\bullet d\vec{l}_2}{R}$$

$$L_{21}=\frac{\mu_0 N_1 N_2}{4\pi}\oint_{l_1}\frac{d\vec{l}_1\bullet d\vec{l}_2}{R}$$ 纽曼公式

目录

静磁场的能量、能量密度及磁场力

静磁场的能量和密度能量

磁场能量密度

$$w_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}$$

静磁场的能量

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\cdot\vec{H} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i\Psi_i = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} L_k I_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq k}^{n} L_{kj} I_k I_j$$

单个载流回路

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\cdot\vec{H}dV = \frac{1}{2}LI^2$$

静磁场的能量、能量密度及磁场力

静磁场的能量和密度能量

1. 自感为L的单个N匝线圈的储能：

$t=0, i=0; i\rightarrow I;$

$$e=-N\frac{d\Phi}{dt}$$

电源在dt内做功为

$$dW_m=-eidt=iNd\Phi$$

$$W_m=N\int id\Phi=\int_0^I Lidi=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}IN\Phi=\frac{1}{2}I\Psi$$

$$N\Phi=LI, Nd\Phi=Ldi$$

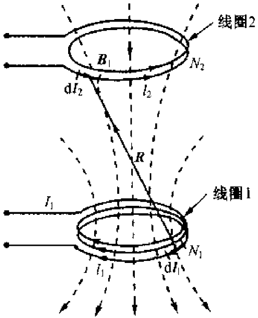


图 3.19 两个彼此靠近的线圈中的磁力线分布

静磁场的能量、能量密度及磁场力

静磁场的能量和密度能量

2.两个线圈的储能

$$W_m = \frac{1}{2}N_1\Phi_1 I_1 + \frac{1}{2}N_2\Phi_2 I_2 = \frac{1}{2}I_1\Psi_1 + \frac{1}{2}I_2\Psi_2$$

$$= \frac{1}{2}N_1\Phi_{11}I_1 + \frac{1}{2}N_1\Phi_{12}I_1 + \frac{1}{2}N_2\Phi_{21}I_2 + \frac{1}{2}N_2\Phi_{22}I_2$$

$$= \frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + \frac{1}{2}L_{12}I_1 I_2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2 + \frac{1}{2}L_{21}I_1 I_2$$

$$= \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + M I_1 I_2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2$$

3.N个载流回路的储能

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} I_i\Psi_i = \sum_{k=1}^{n} L_k I_k^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} L_{kj} I_k I_j$$

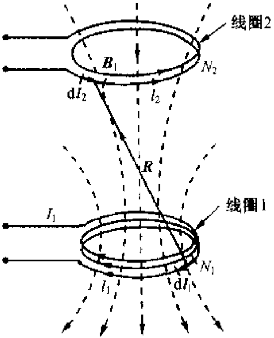


图 3.19 两个彼此靠近的线圈中的磁力线分布

静磁场的能量、能量密度及磁场力

例 4.9

如图所示的长为 l，内外导体的内外半径分别为 a，b，c 及 d 的同轴线的自感。

解：设同轴线内外导体中通有大小相等、方向相反的电流 I，选用圆柱坐标系。采用求解各区域对应内外自感的方法求解总的自感。

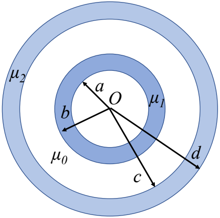
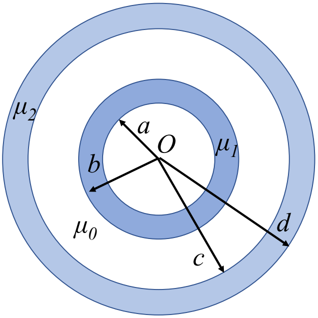


Figure 11: 例 4.9 题图

静磁场的能量、能量密度及磁场力

例 4.9



(1) 求内导体的内自感L_{i1}

$$\text{区域1中}:\vec{H}_{i1}=\frac{I(r^2-a^2)}{2\pi r(b^2-a^2)}\vec{a}_\varphi,\ \vec{B}_{i1}=\mu_1\vec{H}_{i1}$$

$$d\psi_{i1}=\frac{I_{i1}}{I}B_{i1}ldr=\frac{\mu_1 ldr}{2\pi r}\frac{I_{i1}{}^2}{I}=\frac{\mu_1 lIdr}{2\pi r}\frac{(r^2-a^2)^2}{(b^2-a^2)^2}$$

$$L_{i1}=\frac{1}{I}\int d\psi_{i1}=\frac{1}{2\pi}\int_a^b\frac{\mu_1 l}{r}\left(\frac{r^2-a^2}{b^2-a^2}\right)^2dr$$

$$=\frac{\mu_1 l}{2\pi}\left(\frac{1}{b^2-a^2}\right)^2\left(\frac{b^4-a^4}{4}-a^2b^2+a^4+a^4\ln\frac{b}{a}\right)$$

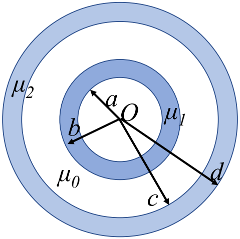
静磁场的能量、能量密度及磁场力

例 4.9

(2) 求内外导体间的外自感L_0

区域2中，$\vec{H_2} = \dfrac{I}{2\pi r}\vec{a_\varphi}, \vec{B_2} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{a_\varphi}$

$$L_0 = \frac{1}{I}\int_b^c \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 l}{2\pi}\ln\frac{c}{b}$$



(3) 求外导体的内自感L_{i2}

区域3中，$\vec{B_{i2}} = \dfrac{\mu_2 I}{2\pi r}(1 - \dfrac{r^2 - c^2}{d^2 - c^2})\vec{a_\varphi}$

$$= \frac{\mu_2 I}{2\pi r}(\frac{d^2 - r^2}{d^2 - c^2})\vec{a_\varphi},$$

$$\vec{H_{i2}} = \frac{I}{2\pi r}(\frac{d^2 - r^2}{d^2 - c^2})\vec{a_\varphi}$$

$$L_{i2} = \frac{1}{I}\int \frac{I_{i2}}{I} d\phi_{i2} = \frac{1}{I}\int_c^d \frac{\mu_2 I l}{2\pi r}(\frac{d^2 - r^2}{d^2 - c^2})^2 dr$$

$$= \frac{\mu_2 l}{2\pi}(\frac{1}{d^2 - c^2})^2(\frac{d^4 - c^4}{4} - c^2 d^2 + c^4 + c^4 \ln\frac{d}{c})$$

静磁场的能量、能量密度及磁场力

例 4.9

$$L = L_0 + L_{i1} + L_{i2}$$

$$\omega_{m1} = \frac{1}{2}\mu_1 H_{i1}^2, \omega_{m2} = \frac{1}{2}\mu_0 H_2^2, \omega_{m3} = \frac{1}{2}\mu_2 H_{i2}^2$$

$$W_m = \int_{V1} \omega_{m1} dV + \int_{V2} \omega_{m2} dV + \int_{V3} \omega_{m3} dV$$

$$= \int_a^b \omega_{m1} 2\pi r l dr + \int_b^c \omega_{m2} 2\pi r l dr + \int_c^d \omega_{m3} 2\pi r l dr$$

$$= \frac{1}{2} L I^2$$

可以直接求出L。

静磁场的能量、能量密度及磁场力

用虚位移法求磁场力

磁通量不变

$$\vec{F}_l = \frac{\partial W_m}{\partial l}|_{\phi=\mathrm{Const}} \text{ 或} \vec{F}_\phi = -\nabla W_m$$

回路电流不变

$$\vec{F}_l = \frac{\partial W_m}{\partial l}|_{I=\mathrm{Const}} \text{ 或} \vec{F}_l = \nabla W_m$$

静磁场的能量、能量密度及磁场力

用虚位移法求磁场力

n 个载流回路中，当仅有一个广义坐标发生位移 dg ，系统的功能守恒是

$$dW = dW_m + F\Delta l, \text{即} d(\sum_{k=1}^{n} I_k\psi_k) = d(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} I_k\psi_k) + F\Delta l$$

电源提供的能量 ＝ 磁场能量的增量 ＋ 磁场力所做的功

常电流系统

外源不断提供能量，一半用于增加磁能，一半提供磁场力作功。

$$f dg = dW_m|_{I_k=\text{Const}}, \quad \text{广义力} \quad f = \frac{\partial W_m}{\partial g}|_{I_k=\text{Const}}$$

静磁场的能量、能量密度及磁场力

用虚位移法求磁场力

常磁链系统

磁链不变，表示没有感应电动势，电源不需要提供克服感应电动势的能量。

$$dW_m = 0, \quad f\,dg = -dW_m|_{\phi_k=\text{Const}}$$

$$广义力 f = -\frac{\partial W_m}{\partial g}|_{\phi_k=\text{Const}}$$

两种假设的结果相同，即

$$f = \frac{\partial W_m}{\partial g}|_{I_k=\text{Const}} = -\frac{\partial W_m}{\partial g}|_{\phi_k=\text{Const}}$$

取两个回路的相对位置坐标为广义坐标，求出互有磁能，便可求得相互作用力。

静磁场的能量、能量密度及磁场力

例 4.10

一 U 形电磁铁，其中 N 匝线圈的电流 I 在磁路中产生磁通为 Ψ_1，铁芯的截面积为 S。求衔铁受到的磁场力。

解:

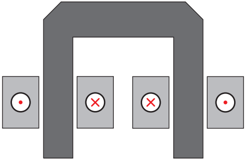


Figure 12: 例 4.10 题图

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} + W_{m3}$$

$$W_{m2} = \int_V \omega_{m2} dV = \int_V \frac{1}{2}\mu_0 H^2 dV = \int_V \frac{B^2}{2\mu_0} dV$$

$$= \int_0^y \frac{\Phi_1^2}{2\mu_0 S^2} S dy = \frac{\Phi_1^2}{2\mu_0 S} y$$

衔铁受到的磁场力为

$$\vec{F}_{\Phi y} = \nabla(2W_{m2}) = -\frac{\phi_1^2}{\mu_0 S}\vec{a}_y$$

静磁场的能量、能量密度及磁场力

例 4.11

试求磁路对磁导率为 m 的棒的作用力，设棒截面积为 $a \times b$

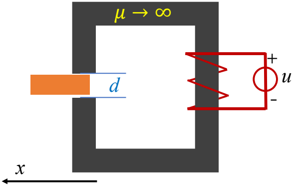


Figure 13: 例 4.11 题图

解：设作用力为 F，设棒沿 x 方向移动 dx，磁场能量的增量

$$dW_m = d(\frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}V) = (\frac{\mu}{2}H^2 - \frac{\mu_0}{2}H^2)abdx$$

$$\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l} = Hd = NI \to H = \frac{NI}{d}$$

$$F = \frac{dW_m}{dx}|_{I_k = c} = \frac{\mu-\mu_0}{2}H^2 ab$$

$$= \frac{\mu-\mu_0}{2}(\frac{NI}{d})^2 ab > 0$$

F>0 表示磁路对试棒的作用力为吸力 (沿 x 轴方向，这也是电磁阀的工作原理。

静磁场的能量、能量密度及磁场力

例 4.12

一矩形截面的镯环，镯环上绕有 N 匝线圈，电流为 I，如图示，试求气隙中的 $\vec{B}$ 和 $\vec{H}$。

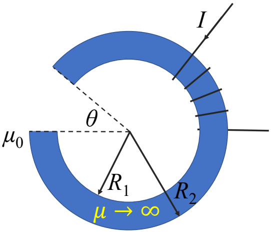


Figure 14: 例 4.12 题图

解：在镯环中，$\mu \to \infty$，$\vec{B} = \mu\vec{H}$ 为有限值，故 $\vec{H} = 0$。取安培环路的半径 $R_1 < r < R_2$，且环路与 I 交链，忽略边缘效应

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$$

$$H \cdot r\theta = NI$$

$$\vec{H} = \frac{NI}{r\theta}\vec{e}_\phi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{r\theta}\vec{e}_\phi$$

目录

作业

4-2，4-4，4-10，4-12，4-15，4-18

4-27，4-28，4-29，4-32，4-33

感谢聆听!

主讲人: 何广强

地址: 上海交通大学
电子工程系

邮箱: gqhe@sjtu.edu.cn

主页: qnp.sjtu.edu.cn