第 8 章 电磁波辐射的基本理论

何广强

上海交大电子工程系量子非线性光子学实验室

Outline

Outline

电磁波辐射的基本理论

电磁波能够脱离场源以电磁波的形式在空间中传播的现象，称为电磁波的辐射。无线电设备中用来辐射和接收电磁波的装置称为天线。天线是无线电通信、雷达、导航、遥感、遥测，射电天文以及电子对抗等各种民用和国防系统中必不可少的组成部分之一。

本章在引入有关辐射和时谐场滞后位概念的基础上，首先介绍基本电、磁振子的辐射原理以及天线的基本参数；然后讨论对称振子、天线阵的远区辐射性；最后介绍与接收天线有关的基本理论。

根据麦克斯韦的两个旋度方程可知，磁场不仅能由传导电流产生，而且能由随时间变化的电场产生；电场不仅能由电荷产生，而且能由随时间变化的磁场产生。由于一般情况下电场随时间的变化率是可变的，因此由电场产生的磁场也是随时间变化的，这个变化的磁场又将激发出新的变化电场。

辐射的基本概念

由此可见，随着时间变化的电磁场，其电场和磁场永远是相互联系而不能分隔的，形成统一的电磁场。所以，假设自由空间中某一给定区域中的电场有变化，变化的电场在邻近区域激起变化的磁场，这个变化的磁场又在较远处的区域激起新的变化电场，而后又在更远的区域激发出变化磁场依此类推。这种由近及远，交替激起电场和磁场的过程，就是电磁波产生的过程，即电磁波的辐射过程。

电磁波辐射和天线的基本概念

辐射的基本概念

怎样才能使一种装置（或电路）用作有效辐射电磁波的天线呢？一方面，某装置的工作频率要尽可能高，这是因为电磁波的辐射依赖于变化的电场（即位移电流）和变化的磁场，因此电磁场变化的快慢决定着所激发场的强弱，也就决定着辐射能量的多少。换言之，在一定场强下，频率越高，位移电流越强，从而辐射的能量也越多。所以，某装置的波源频率是直接影响其辐射的一个因素。另一方面，装置的场源结构必须是开放系统，从而使波源激发出的电场和磁场分布在同一空间。

电磁波辐射和天线的基本概念

天线的分类

凡是通过辐射和接收电磁波来完成其功能的无线电设备都需要配备有天线。天线的种类繁多。按用途的不同，可以将天线分为通信天线、广播电视天线、雷达天线等；按工作波长的不同，可以将天线分为长波天线、中波天线、短波天线、超短波天线、微波天线以及毫米波天线等；按极化特性的不同，可以将天线分为线极化天线、圆极化天线、椭圆极化天线以及双、多极化天线等；按频带宽窄的不同，可以将天线分为窄带天线、宽带天线以及非频变天线等；按工作原理不同，可以将天线分为线天线和面天线。

电磁波辐射和天线的基本概念

天线的分类

图1中示出了几种常见的线天线和面天线。

本章涉及的天线主要限于线状导体构成的天线，即线天线。

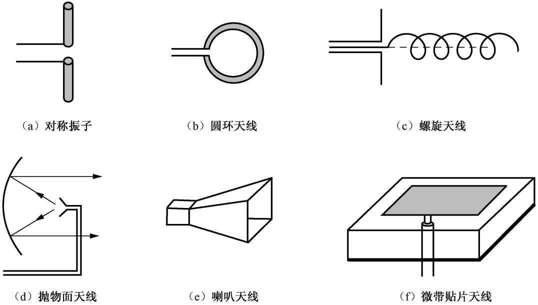


Figure 1: 几种常见的线天线和面天线

由于空间电磁波的场源是天线上的时变电流和电荷，因此辐射问题就是求解天线上的场源在其周围空间所产生的电磁场分布。严格地说，空间电磁场的求解就是在天线几何形状确定的边界条件下解麦克斯韦方程组，在绝大多数情况下这显然是十分困难甚至是不可能的。因此，辐射问题的求解往往采用近似解法，即先近似选取天线上的场源分布，再根据场源分布求天线辐射场。

电磁波辐射和天线的基本概念

时谐场的滞后位

根据天线的场源分布求其辐射空间的电磁场，可采用直接解法和间接解法。直接解法就是根据电磁场的复矢量 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$ 满足的非齐次矢量亥姆霍兹方程，由天线的电流分布直接求解 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$，这种解法的积分运算十分复杂；间接解法就是先由天线上的电流分布求解矢量磁位 $\vec{A}$，再由 $\vec{A}$ 和 $\vec{E}$ 与 $\vec{H}$ 间的微分关系求得 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$。这种解法的积分运算通常比直接解法要简单多，因此多采用间接解法求解天线辐射问题。

由课本式（5.76）和（5.78）可知，若自由空间中有限区域内有时谐的体电流和体电荷分布，则矢量磁位 $\vec{A}$ 和标量电位 V 分别满足以下方程：

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \tag{1}$$

$$\nabla^2 V + k^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2}$$

式中 $k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$。

方程 (1) 在自由空间中任一点 $p(\vec{r})$ 处的解可写成为以下形式：

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\vec{r}\,')\frac{e^{-jkR}}{R}dV' \tag{3}$$

此式代表体积 V' 内的体电荷在点 $p(\vec{r})$ 处产生的电位，R 是电荷元 $\rho(\vec{r}\,')dV'$ 到点 $p(\vec{r})$ 处的距离，即 $R = \left|\vec{r} - \vec{r}\,'\right|$。不失一般性，下面在直角坐标系下证明式（3）满足方程。

将直角坐标系下的式（3）代入方程（2）的左端，并注意到 ∇^2 是对场点坐标 (x, y, z) 的作用，而体积分是对源点坐标 (x', y', z') 进行的，因此

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(x',y',z')\left[\nabla^2(\frac{e^{-jkR}}{R}) + k^2\frac{e^{-jkR}}{R}\right]dV' \quad (4)$$

由于

$$\nabla^2(\frac{e^{-jkR}}{R}) = -k^2\frac{e^{-jkR}}{R} + e^{-jkR}\nabla^2(\frac{1}{R})$$

将上式代入式（4），并利用式（1-50）的结果，得

电磁波辐射和天线的基本概念

时谐场的滞后位

体电流在场点 $p(\vec{r})$ 处产生的矢量磁位为

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')e^{-jkR}}{R}dV' \tag{5}$$

这就是矢量磁位方程（1）在自由空间中场点 $p(\vec{r})$ 处的解。

由式（3）和（5）容易得到 $\vec{A}$ 和 ϕ 的瞬时表达式为

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\left[\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{V'}\frac{\vec{J}(\vec{r}\,')e^{j\omega(t-R/v)}}{R}dV'\right] \tag{6}$$

$$\phi(\vec{r}) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\frac{\rho(\vec{r}\,')e^{j\omega(t-R/v)}}{R}dV'\right] \tag{7}$$

时谐场的滞后位

式中，与相位有关的因子 $e^{j\omega(t-R/v)}$ 表明，自由空间中离开源点为 R 的观察点在某一时刻 t 的位场 $\vec{A}$ 和 ϕ 是由时谐电流和电荷激发的，但它并不取决于同一时刻 t 的电流源和电荷源，而是取决于 $(t-R/v)$ 时刻的源。换言之，观察点的位场变化滞后于波源的变化，滞后时间 R/v ，这个时间即是电磁波在自由空间中传播距离 R 所需的时间。因此，通常称 $\vec{A}$ 为滞后矢量磁位，ϕ 为滞后标量电位。

电磁波辐射和天线的基本概念

时谐场的滞后位

这样，根据时谐电流源解得后，即可按以下两式确定 $\vec{E}$ 和 $\vec{H}$：

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - j\frac{\nabla(\nabla\cdot\vec{A})}{\omega\mu_0\varepsilon_0} \tag{8a}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\vec{A}) \tag{8b}$$

这正是电场磁场的复数表达形式。

Outline

电流元的辐射

电流元的电磁场

电流元又称为基本电振子或电偶极子，指的是无限小的线性电流单元，即其长度远小于工作波长 λ，线上的电流振幅和相位处处相同(均匀分布)。任何实际天线上的电流不可能均匀分布，但赫兹电偶极子是具有同电流元相似结构和特点的实际振子，而且任何实际的线天线都可以分解为许许多多个电流元，所以分析和推导电流元的辐射场具有实际意义。

电流元的辐射

电流元的电磁场

将电流元沿圆球坐标系的 z 轴放置，使它的中心与坐标原点重合，电流沿正 z 轴方向，如图2所示。在式（5）中，因 $\vec{J}dV' = \vec{J}dSdz = \vec{a}_z Idz$，故

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-l/2}^{l/2}\frac{Ie^{-jkR}}{R}dz = \vec{a}_z\frac{\mu_0 Il}{4\pi R}e^{-jkR} = \vec{a}_z A_z \tag{9}$$

此式对 $l \ll \lambda$ 的电流元是精确的，对其它的电流元则是近似精确的。

将式（9）代入式（8b），可得

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times(\vec{a}_z A_z) = \frac{1}{\mu_0}(\nabla A_z)\times\vec{a}_z \tag{10}$$

电流元的辐射

电流元的电磁场

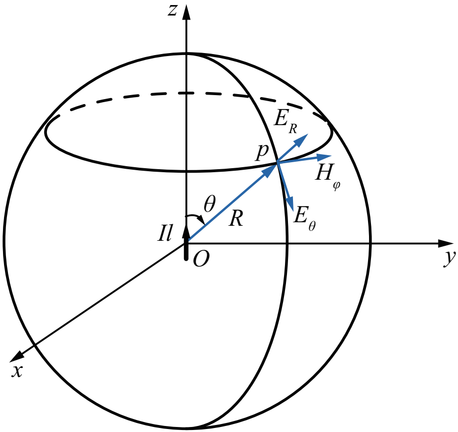


Figure 2: 电流元的电磁场

式中利用了场论恒等式，并注意到 $(\nabla\times\vec{a}_z)=0$。

将式（9）代入式（10），并将其在圆球坐标系下展开，得

$$\vec{H}=\nabla(\frac{Ile^{-jkR}}{4\pi})\times\vec{a}_z=\frac{Il}{4\pi}\frac{\partial}{\partial R}(\frac{e^{-jkR}}{R})(\vec{a}_R\times\vec{a}_z)$$

$$=\frac{Il}{4\pi}(\frac{-jke^{-jkR}}{R}-\frac{e^{-jkR}}{R^2})(\vec{a}_R\times\vec{a}_z)$$

$$\vec{H} = \vec{a}_\varphi \frac{Il}{4\pi} \sin\theta (\frac{jk}{R} + \frac{1}{R^2}) e^{-jkR} \tag{11}$$

由于自由空间中的场点无源（$\vec{J} = 0$），因此可不用式（8a）求解，而是直接利用麦克斯韦方程（2-144b）求出，即

$$\vec{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \nabla \times \vec{H} = \vec{a}_R E_R + \vec{a}_\theta E_\theta \tag{12}$$

式中

$$E_R = \frac{\eta_0 Il}{2\pi R^2} \cos\theta (1 + \frac{1}{jkR}) e^{-jkR} \tag{13a}$$

$$E_\theta = j \frac{\eta_0 kIl}{4\pi R} \sin\theta (1 + \frac{1}{jkR} - \frac{1}{k^2R^2}) e^{-jkR} \tag{13b}$$

可见，电流元的磁场只有沿 φ 向的分量 H_φ；电场只有沿 R 向和 θ 向的分量 E_R 和 E_θ。电场和磁场互相垂直。若用电力线和磁力线描述电流元产生的电场和磁场，则其电力线处于圆球的子午面（包括电流元轴线的平面）内，而其磁力线则与圆球的赤道面（$\theta = 90^\circ$ 的平面）平行。

图 8.3 中示出了电流元周围电力线和磁力线在子午面上的分布图。由图可见，距离电流元轴线为处（即时间为时刻），电力线脱离场源而形成闭合的回路，随时间的推移，电流元产生的电磁场从场源向外空间传播，形成电磁波。

电流元的辐射

电流元的电磁场

利用式（11）和式（12）可得电流元的复坡印亭矢量为

$$\begin{aligned}\vec{S} =& \frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H}^*) = \vec{a}_R[\frac{\eta}{2}(\frac{Il}{4\pi})^2 k^4\sin^2\theta(\frac{1}{k^2R^2}-\frac{j}{k^5R^5})] \\ &-\vec{a}_\theta[\frac{\eta}{2}(\frac{Il}{4\pi})^2 k^4\sin 2\theta(-\frac{j}{k^3R^3}-\frac{j}{k^5R^5})]\end{aligned} \quad (14)$$

这表明，仅在径向（$\vec{a}_R$ 方向）上有实功率流存在。于是，来自电流元的平均功率流密度为

$$\vec{S}_{av} = \mathrm{Re}[\frac{1}{2}(\vec{E}\times\vec{H}^*)] = \vec{a}_R[\frac{\eta}{2}(\frac{kIl}{4\pi R})^2\sin^2\theta] \quad (15)$$

从式（11）和（13）可见，电流元的三个场分量都随距离 R 的增加而减少，通常按距离 R 的大小将电流元的电磁场分成为三个区域：近区、远区和中间区。近区和远区的分界点，按式（11）中括号内的两项相等得到，即 $kR=1$。

电流元的辐射

电流元的电磁场

(1) 近区场

近区场指的是 $kR \ll 1$，即 $R \ll \lambda/2\pi$ 的区域，在此区域中 $1 \ll 1/kR \ll 1/k^2R^2$，$e^{-jkR} \approx 1$。于是，式（11）和（13）可以近似为

$$
\begin{aligned}
H_\varphi &= \frac{Il}{4\pi R^2} \sin\theta e^{-jkR} \\
E_r &= -j\frac{Il}{2\pi R^3}\frac{1}{\omega\varepsilon_0}\cos\theta e^{-jkR} \\
E_\theta &= -j\frac{Il}{4\pi R^3}\frac{1}{\omega\varepsilon_0}\sin\theta e^{-jkR}
\end{aligned} \tag{16}
$$

电流元的辐射

电流元的电磁场

在此区域中由于场的滞后效应不明显，故其电场的表达式与静电场中电偶极子的电场表达式相同，而磁场的表达式与恒定电流元的磁场的表达式相同，所以此区域中的场称为似稳场或感应场。从电流元的三个场分量的表达式还可看出，电场和磁场之间存在 90° 的相位差，根据坡印亭矢量与场量间的关系可知，此时平均功率流密度近似等于零（$\vec{S}_{av} \approx 0$），即电磁场能量被束缚在电流元附近，电场能量和磁场能量相互转换，不存在能量传输。当然，这只是一种近似，不能简单地得出近区场不存在能量辐射的结论。

(2) 远区场

远区场指的是 $kR \gg 1$，即 $R \gg \lambda/2\pi$ 的区域。在此区域中 $1 \gg 1/kR \gg 1/k^2R^2$，此时电流元的电磁场主要由具有 $1/R$ 的项决定，而具有 $1/R^2$ 及 $1/R^3$ 的项可以忽略不计。一般的实用天线都工作于远区。这样，在式（11）及（13）中仅保留含有 $1/R$ 的项，有

$$
\begin{aligned}
E_\theta &= j\frac{\eta_0 Il}{2\lambda R}\sin\theta e^{-jkR} \\
H_\varphi &= j\frac{Il}{2\lambda R}\sin\theta e^{-jkR}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

电流元的辐射

电流元的电磁场

由此可知此区域中的场具有以下主要特点:

① 电场只有一个分量 E_θ，磁场也只有一个分量 H_φ，它们相互垂直，且垂直于（$\vec{a}_R$ 向)，故其复坡印亭矢量 $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}^*/2=\vec{a}_R\left|E_\theta\right|^2/2\eta_0$ 且指向 $\vec{a}_R$。这说明电流元的远区辐射场是一个沿径向传播的 TEM 波，即电磁场能量沿径向辐射，所以远区场又称为辐射场;

② 无论是 E_θ 还是 H_φ，其空间相位因子均为 e^{-jkR}，即远区辐射场的等相位面是球面，其对应的波是球面波。显然，当 R 很大时，球面上某一很小区域上的波可视为平面波。因 $E_\theta/H_\varphi=\eta_0$，故 E_θ 和 H_φ 同相;

③ 及均与距离 R 成反比，与电流及电流元的电长度（l/λ）成正比，这是因为辐射场来源于波源之故；

④ 场的振幅与极角 θ 有关，即正比于 $\sin\theta$ ，但与方位角 φ 无关。这表明电流元的远区辐射场具有方向性，在相同距离 R 的情况下不同方向（θ 变化）上的各点场强不同。辐射场的方向性是实际天线的一个主要的特征。

电流元的辐射

电流元的电磁场

(3) 中间区场

中间区是介于近区和远区之间的区域，在此区域内，电流元的电磁场与 $1/R$，$1/R^2$，$1/R^3$ 的项成正比，各项的大小相差不多，故不可忽略任何一项，此区域中的场是感应场和辐射场的组合，因此无需专门讨论。事实上，对实际应用的天线，一般工作于远区。

电流元的辐射

电流元的辐射方向图

任何实用天线的辐射都具有方向性，通常将天线远区辐射场的振幅与方向间的关系用曲线表示出来，这种曲线图被称之为天线的辐射方向图，而将离开天线一定距离 R 处的天线远区的辐射场量与角度坐标间的关系式称为天线的方向图函数，记为 $|F(\theta,\varphi)|$。

从前面讨论可知，电流元的远区辐射场量在相同距离 R 的球面上不同方向的各点，场强是不同的，它与 $\sin\theta$ 成正比，因此电流元的方向图函数为

$$|F(\theta,\varphi)| = |F(\theta)| = \sin\theta$$

电流元的辐射

上海交通大学

电流元的辐射方向图

为了作出电流元的辐射方向图，将电流元中心置于坐标原点，向各个方向作射线，并取其长度与场强的大小成正比，即得到一个立体图形，也就是得到电流元的立体方向图，它的形状像汽车轮胎。如图3(a) 所示。天线的立体方向图一般较难画出，通常只作出相互垂直的两个平面内的方向图，即 **E** 面和 **H** 面方向图。电流元的 **E** 面方向图处于子午面，即电场分量 E_θ 所处的平面内的方向图，故称为 **E** 面方向图；**H** 面方向图处于赤道面内，即与磁场分量 H_φ 平行的平面内的方向图，故称为 **H** 面方向图。

二维平面方向图可以在极坐标系中绘制，也可以在直角坐标系中绘制，但在极坐标系中绘制的方向图较为直观，因此较为常用。在极坐标系中绘制的电流元的 **E** 面和 **H** 面方向图如图3(b) 和 (c) 所示。显然，**E** 面方向图关于电流元的轴线呈轴对称分布，在 $\theta = 90^\circ$ 方向出现最大值“**1**”，其他方向上的矢径按作出，而在轴线（$\theta = 0^\circ$ 和 $\theta = 180^\circ$）上其值为零。在 **H** 面（$\theta = 90^\circ$）上，各方向上场强均相同，故其方向图是一个单位圆。这样，将 **E** 面方向图绕电流元的轴线旋转一周即可得到电流元的立体方向图。

电流元的辐射

电流元的辐射方向图

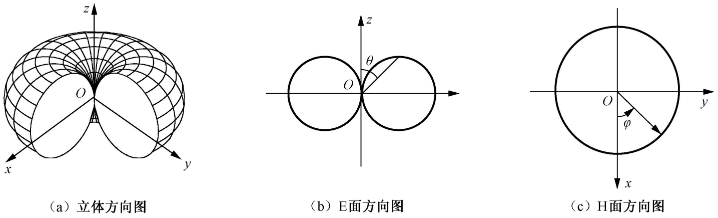


Figure 3: 电流元的方向图

Outline

天线的基本参数

一副天线性能的优劣直接影响无线电设备的质量，所以设计天线时必须精确地考虑和评价其技术性能。为了定量衡量一副天线的性能，通常用一些特性参数作为天线的技术指标。天线的主要特性参数为主瓣宽度、副瓣电平、前后比、方向性系数、效率、增益、等效高度、以及极化、输入阻抗等。下面仅介绍较常用的特性参数。

天线的基本参数

天线的方向图及其有关参数

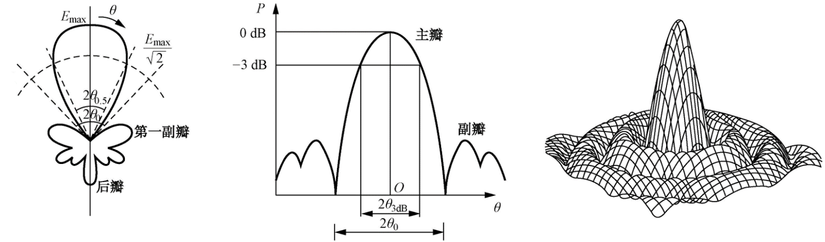
任何实用天线的远区辐射场都是随空间的位置而变化的，因此在球坐标系中天线至场点距离 R 处的远区辐射场量只是角度 θ，φ 的函数，这个函数就是方向图函数 $|F(\theta,\varphi)|$，通常将方向图函数关于其最大值 $|F_{max}(\theta,\varphi)|$ 进行归一化的函数称为归一化方向图函数，记为 $|F(\theta,\varphi)|\,/\,|F_{max}(\theta,\varphi)|$。按归一化方向图函数绘制的方向图称为天线的归一化方向图。显然，图3中示出的电流元的 **E** 面和 **H** 面方向图也是归一化的方向图（因为其最大辐射方向上的最大值为 1）。

1) 主瓣宽度

当天线的 **E** 面和 **H** 面方向图具有如图4所示的多瓣形状时，通常将天线最大辐射方向所在的波瓣称为主瓣，其余的波瓣称为副瓣（或旁瓣）及后瓣（或尾瓣)。在主瓣两侧分别取辐射功率（场强）等于最大值方向的辐射功率的 $1/2$（场强的 $1/\sqrt{2}$）处的两点，这两点间夹角称为主瓣的半功率点张角，记为 $(2\theta_{0.5})_{E,H}$ 或 $(2\theta_{-3dB})_{E,H}$，或称半功率波束宽度 (或称为主瓣宽度)。从极坐标的坐标原点向主瓣的两侧引射线，这两根射线间的夹角称主瓣零点宽度，记为 $2\theta_0$。

天线的基本参数

天线的方向图及其有关参数



（a）极坐标系中的平面方向图 （b）直角坐标系中的平面方向图 （c）立体方向图

Figure 4: 天线的三种方向图

2) 副瓣电平

实际天线的方向图往往不止一个副瓣，而是有若干个副瓣。紧靠主瓣的副瓣称为第一副瓣，依次称为第二，三，...副瓣。为估计天线副瓣的强弱，通常用副瓣电平来表示，定义为任一副瓣的最大值与主瓣最大值之比，并以 **dB** 作单位。由于最靠近主瓣的的第一副瓣其电平最高，因此通常对天线的第一副瓣电平提出要求。天线副瓣的辐射，无论对通信还是雷达来说都是有害的，它直接影响天线性能的优劣程度。

天线的基本参数

天线的方向图及其有关参数

3) 前后比

天线的前后比是指天线最大辐射方向（前向）电平与其相反方向（反向）电平之比，通常也用作单位。天线的前后比反映了天线的前、后向隔离程度或抗干扰能力。天线的前后比应尽可能高些。

4) 方向性系数

由于上述与方向图有关的参数只能表示同一天线在空间各个不同方向辐射能量的相对大小，但却不能反映天线在全空间中辐射能量的集中程度。为了定量衡量天线的方向性，下面引入天线方向性系数这一重要参数。

天线的方向性系数定义为：天线在远区最大辐射方向上某点的平均辐射功率密度 $(S_{max})_{av}$ 与平均辐射功率相同的无方向性天线（各向同性天线）在同一点的平均辐射功率密度 $(S_0)_{av}$ 之比，记为 D，即

$$D = \left.\frac{(S_{max})_{av}}{(S_0)_{av}}\right|_{P_r\text{相同},R\text{相同}} = \left.\frac{|E_{max}|^2}{|E_0|^2}\right|_{P_r\text{相同},R\text{相同}} \tag{18}$$

式中：$(S_{max})_{av} = |E_{max}|^2/2\eta_0$；$(S_0)_{av} = |E_0|^2/2\eta_0$；$\eta_0 = 120\pi\Omega$。

对无方向性天线，因 $(S_0)_{av} = P_r/4\pi R^2$，故式为

$$D = \frac{|E_{max}|^2 R^2}{60P_r} \tag{19}$$

所以

$$|E_{max}| = \frac{\sqrt{60P_r D}}{R} \tag{20}$$

由此可见，在平均辐射功率相同的情况下，有方向性天线在最大辐射方向上的场强是无方向性天线的场强的 $\sqrt{D}$ 倍，即最大辐射方向上的平均辐射功率增大到 D 倍。这表明天线在其他方向辐射的部分功率加强到其最大辐射方向上，且主瓣越窄，加强到最大辐射方向上的功率就越多，则方向性系数也越大。

若已知天线的归一化方向图函数为 $|f(\theta,\varphi)|$，则天线在空间任意方向上远区的电场强度的模及平均辐射功率密度分别为

$$|E(\theta,\varphi)| = |E_{max}|\,|f(\theta,\varphi)| \tag{21a}$$

$$S_{av}(\theta,\varphi) = \frac{|E(\theta,\varphi)|^2}{2\eta_0} = \frac{|E_{max}|^2\,|f(\theta,\varphi)|^2}{240\pi} \tag{21b}$$

于是，天线的平均辐射功率为

$$P_r = \oint_S S_{av}(\theta,\varphi)dS = \frac{|E_{max}|^2\,R^2}{240\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} |f(\theta,\varphi)|^2 \sin\theta d\theta \tag{22}$$

天线的基本参数

天线的方向图及其有关参数

将上式代入式（19），即得方向性系数的计算式

$$D = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left|f(\theta,\varphi)\right|^2 \sin\theta d\theta d\varphi} \tag{23}$$

若 $f(\theta,\varphi)=f(\theta)$，即方向图与 φ 无关，则

$$D = \frac{2}{\int_0^{\pi}\left|f(\theta)\right|^2 \sin\theta d\theta} \tag{24}$$

天线的基本参数

天线的方向图及其有关参数

例 1. 求沿 z 轴放置的电流元的 E 面主瓣宽度和方向性系数。

解：因沿 z 轴放置的电流元的归一化 E 面方向图函数为

$$|f(\theta)| = \sin\theta$$

于是，由 $\sin\theta_{0.5E} = 1/\sqrt{2}$ 得电流元的 E 面主瓣宽度为 $2\theta_{0.5E} = 90^\circ$。
将沿 z 轴放置的电流元的方向图函数代入式（23），得

$$D = \frac{2}{\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \sin\theta d\theta} = \frac{2}{\int_0^{2\pi} \sin^3\theta d\theta} = \frac{2}{(4/3)} = 1.5$$

天线的基本参数

效率

由于实际天线中导体和介质都要引入一定的欧姆损耗，因此天线的平均辐射功率 P_r 一般都小于天线的平均输入功率 P_{in}。天线效率定义为，天线的辐射功率 P_r 与输入功率 P_{in} 之比，记为 η_A，即

$$\eta_A = \frac{P_r}{P_{in}} = \frac{P_r}{P_r + P_d} \tag{25}$$

式中，P_d 为天线平均损耗功率，它同损耗电阻 R_d 间的关系可表为

$$P_d = \frac{1}{2} I_m^2 R_d$$

天线的基本参数

效率

而 I_m 为天线输入电流的最大值。于是，式（25）可表示为

$$\eta_A = \frac{R_r}{R_d + R_r} \tag{26}$$

可见，要提高天线的效率，应尽可能提高天线的辐射电阻，尽可能降低天线的损耗电阻。当频率较低时，由于天线的长度和波长相比很小，辐射电阻很小，而一般天线的尺寸较大使损耗较大，因此 η_A 较低。在微波波段，特别是频率高端，由于天线几何尺寸与波长可相比拟或更大，辐射电阻大大提高，而损耗不很高，与辐射电阻相比可忽略不计，因此天线效率可认为接近于 **1**，即 $\eta_A \approx 1$

天线的基本参数

增益系数

天线的增益系数定义为：天线在远区最大辐射方向上某点的平均功率密度与平均输入功率相同的无方向性天线在同一点的平均功率密度之比，记为 G，即

$$G = \left.\frac{(S_{max})_{av}}{(S_0)_{av}}\right|_{P_{in}\text{相同},R\text{相同}} \tag{27}$$

式中，$(S_0)_{av} = P_r/4\pi R^2$。于是，式（27）变为

$$G = \frac{(S_{max})_{av}}{(P_{in}/4\pi R^2)} = \frac{(S_{max})_{av}}{(P_r/4\pi R^2)}\frac{P_r}{P_{in}} = D\eta_A \tag{28}$$

天线的基本参数

等效高度

天线的等效高度（或有效长度）定义为：在保持实际天线最大辐射方向上场强值不变的条件下，假设天线上电流为均匀分布时天线的等效高度。它是将天线在最大辐射方向上的场强与天线上的电流联系起来的一个参数。通常将等效高度归于输入电流的记为 h_{ein}，归于波腹电流的记为 h_{em}。天线的等效高度越高，表明天线的辐射能力越强。

Outline

对称振子天线

前面所述的电流元和磁流元因其辐射电阻低，不能作为实际天线使用。下面将介绍的中心馈电，长度与波长相比拟的对称振子天线（简称对称振子），是最基本也是最常见的一种实用型天线。

对称振子天线

对称振子的电流分布与远区辐射场

对称振子是由两根粗细和长度都相同的导线构成，中间为两个馈电端，如图5所示。当在对称振子的中间馈电点接上高频电动势时，在对称振子的两臂上将产生高频电流，该电流将产生辐射场。由于对称振子的长度可与波长相比拟，其上电流的幅度和相位不能视为处处相同，因此对称振子的辐射场不同于电流元的辐射场。但可以将对称振子分成无数小段，每一小段都可看成是电流元，则整个对称振子的辐射场就等于电流元的辐射场沿整个导线长度的积分。所以，为了求得对称振子的辐射场，首先应确定对称振子上的电流分布。

对称振子天线

对称振子的电流分布与远区辐射场

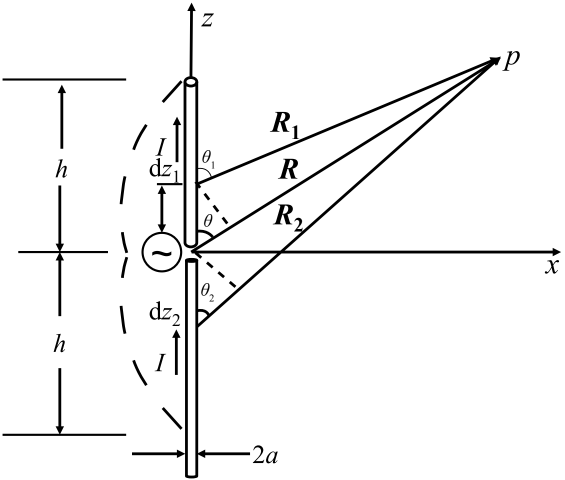


Figure 5: 对称振子

对称振子上的电流分布可近似采用传输线理论进行分析，即将对称振子看成是一段长为 h，终端开路的传输线分别向上向下展开 $180°$ 成为一直线而成，如图6所示，对称振子上的电流分布与终端开路传输线上的一致。选取对称振子的轴线与 z 轴重合，对 $a \ll \lambda$ 的振子，若略去因辐射引起的电流分布的改变，则电流近似于正弦分布，即

$$I(z) = I_m \sin[k(h - |z|)] \tag{29}$$

式中 I_m 为电流驻波的波腹点处的电流，即电流最大值。采用上述近似在工程应用中有足够精度。

对称振子天线

对称振子的电流分布与远区辐射场

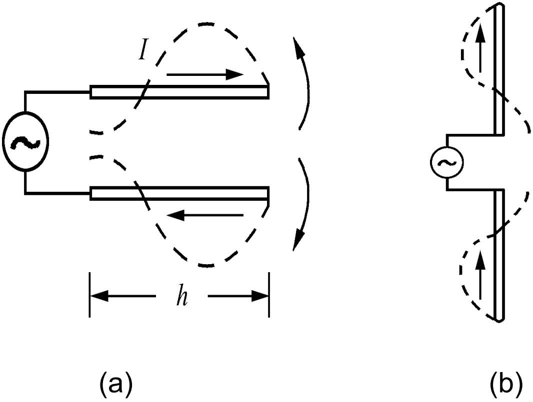


Figure 6: 开路传输线演变成对称振子

对称振子上臂 z 处的电流元在远区场点 p 产生的辐射电场为

$$d\vec{E}_1 = (dE_{\theta_1})\vec{a}_{\theta_1} = \vec{a}_{\theta_1} j\frac{\eta_0 I(z)dz}{2\lambda R_1}\sin\theta_1 e^{-jkR_1} \tag{30}$$

振子下臂关于中点对称的 $-|z|$ 处电流元 $I_{z_2}dz_2 = I(z)dz$ 在 p 处产生的辐射场为

$$d\vec{E}_2 = (dE_{\theta_2})\vec{a}_{\theta_2} = \vec{a}_{\theta_2} j\frac{\eta_0 I(z)dz}{2\lambda R_2}\sin\theta_2 e^{-jkR_2} \tag{31}$$

对远区场点，各源点至场点的射线可视为平行，即 $\vec{R}_1//\vec{R}//\vec{R}_2$，从而有 $\theta_1 = \theta_2 = \theta$，$\vec{a}_{\theta_1} \approx \vec{a}_{\theta_2} \approx \vec{a}_\theta$，$1/R_1 \approx 1/R_2 \approx 1/R$。在辐射电场的相位因子中，应有 $R_1 \approx R - |z|\cos\theta$，$R_2 \approx R + |z|\cos\theta$。

对称振子天线

对称振子的电流分布与远区辐射场

于是，电场 $d\vec{E}_1$ 和 $d\vec{E}_2$ 方向的单位矢量均为 $\vec{a}_\theta$，其矢量和变成为代数和。故有

$$
\begin{aligned}
dE_\theta = dE_{\theta_1} + dE_{\theta_2} &= j\frac{\eta_0 I(z)}{2\lambda R}\sin\theta e^{-jkR}(e^{jk|z|\cos\theta} + e^{-jk|z|\cos\theta}) \\
&= j\frac{\eta_0 I_m \sin[k(h-|z|)]dz}{2\lambda R}\sin\theta e^{-jkR} 2\cos(k|z|\cos\theta)
\end{aligned}
$$

总辐射电场为

$$
E_\theta = \int_0^h dE_\theta = j\frac{60 I_m}{R} e^{-jkR}\frac{\cos(kh\cos\theta) - \cos(kh)}{\sin\theta} \qquad (32)
$$

而辐射磁场为

$$H_\varphi = \frac{E_\theta}{\eta_0} \tag{33}$$

由此可见，与电流元相似，对称振子的远区辐射场也只有 E_θ 和 H_φ 两个分量，故辐射的远区场是沿矢量 $\vec{a}_R$ 方向传播的 TEM 波，且电场分量与磁场分量同相；辐射的电磁波也是球面波，辐射中心就是对称振子的中心；辐射场与 R 成反比，与 I_m 成正比，并与 θ 有关，即辐射场具有方向性。

对称振子天线

对称振子的电流分布与远区辐射场

对称振子常见的臂长是 $h = \lambda/4$，即 $2h = \lambda/2$，这种对称振子称为半波对称振子。半波对称振子的远区辐射电场为

$$E_\theta = j\frac{60I_m}{R}\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}e^{-jkR} \tag{34}$$

式（32）中电场分量 E_θ 与坐标角 θ 间的关系即对应对称振子的方向图函数，即

$$|F(\theta,\phi)| = |F(\theta)| = \frac{|\cos(kh\cos\theta) - \cos(kh)|}{|\sin\theta|} \tag{35}$$

而归一化的方向图函数为

$$|f(\theta)| = \frac{|F(\theta)|}{|F_{max}(\theta)|}$$

对一般应用的对称振子，最大辐射方向在 $\theta = \pi/2$ 处，此时

$$|F_{max}(\theta)| = |1 - \cos(kh)|$$

对称振子天线

对称振子的方向图与辐射电阻

因此

$$|f(\theta)| = \left| \frac{1}{1-\cos(kh)} \frac{\cos(kh\cos\theta)-\cos(kh)}{\sin\theta} \right| \tag{36}$$

特别地，对半波对称振子，有

$$|F(\theta)| = |f(\theta)| = \left| \frac{\cos(\pi\cos\theta/2)}{\sin\theta} \right| \tag{37}$$

从对称振子的归一化方向图函数可知，它只含有 θ，不含有 φ，这说明对称子的辐射场无方向性，也就是在垂直于对称振子的 **H** 面内无方向性，即对称振子的 **H** 面方向图仍然是单位圆。

对称振子天线

对称振子的方向图与辐射电阻

对称振子的 **E** 面方向图除了随角度 θ 变化外，还与对称振子的电长度 $2h/\lambda$ 有关。图7示出了不同 $2h/\lambda$ 值时对称振子的 **E** 面方向图的变化情况。由图可见，当 $2h/\lambda \leq 1$ 时，方向图只有两个主波瓣，没有副瓣。在垂直于振子轴线上有最大辐射，且振子的臂长越长，方向图越尖锐，即方向性越强；当 $2h/\lambda > 1$ 时，方向图出现副瓣，随着振子臂长的增加，中央波瓣将逐渐变小，副瓣逐渐变大，当 $2h/\lambda = 2$ 时，中央波瓣消失，而出现四个波瓣。可以证明，半波对称振子和全波对称振子的 **E** 面主瓣宽度分别为 $78°$ 和 $47.8°$。

对称振子天线

对称振子的方向图与辐射电阻

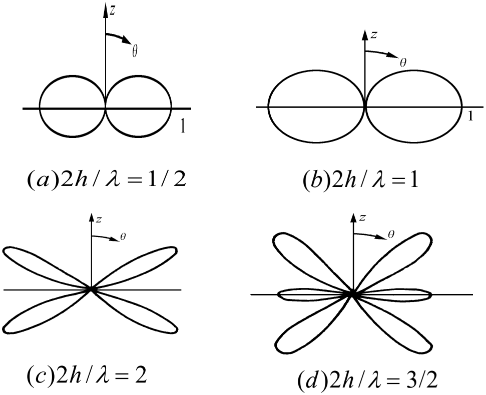


Figure 7: 不同电长度的对称振子的归一化 **E** 面方向图

对称振子的辐射功率为

$$P_r = \oint_S \vec{S}_{av} \cdot d\vec{S} = 30 I_m^2 \int_0^\pi \frac{[\cos(kh\cos\theta) - \cos(kh)]^2}{\sin\theta} d\theta \tag{38}$$

因此辐射电阻

$$R_r = \frac{P_r}{(I_m^2/2)} = 60 \int_0^\pi \frac{[\cos(kh\cos\theta) - \cos(kh)]^2}{\sin\theta} d\theta \tag{39}$$

图8示出了对称振子的辐射电阻随其单臂电长度 h/λ 的变化曲线。

可以证明：对半波对称振子，$R_r = 73.1\Omega$；对全波对称振子，$R_r = 200\Omega$；对 $h/\lambda \leq 0.1$ 的对称振子，$R_r \approx 20(kh)^4\Omega$。

对称振子天线

对称振子的方向图与辐射电阻

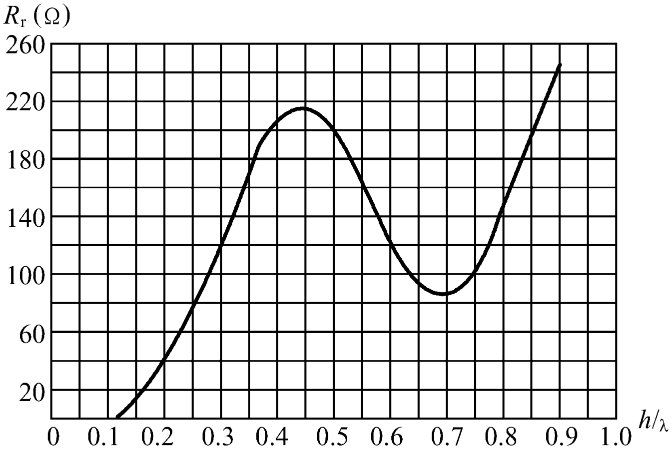


Figure 8: 对称振子的辐射电阻随 h/λ 的变化曲线

对称振子天线

对称振子的方向图与辐射电阻

例 2. 求半波对称振子的辐射电阻和方向性系数。

解：① 由式（38）可得半波对称振子的辐射功率为

$$P_r = 30 I_m^2 \int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta} d\theta = 15 I_m^2 \int_0^{\pi} \frac{1+\cos(\pi\cos\theta)}{\sin\theta} d\theta \qquad (40)$$

令 $u = \pi + \pi\cos\theta$，则式（40）中的积分变为

$$\int_0^{\pi} \frac{1+\cos(\pi\cos\theta)}{\sin\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos u}{u} du$$

将上式代入式（40），并利用余弦积分表，可得

$$P_r = 15 I_m^2 \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos u}{u} du = 15 I_m^2 [\ln(2\pi) + \gamma - C_i(2\pi)] \qquad (41)$$

式中，$\gamma = 0.5772$ 为欧拉常数；$C_i(2\pi) = -0.0226$，为余弦积分值。

对称振子天线

对称振子的方向图与辐射电阻

于是辐射电阻为

$$R_r = \frac{2P_r}{I_m^2} = 73.1\Omega \tag{42}$$

② 可利用式（19）直接由定义式求半波对称振子的方向性系数。由式(34)，并令 $\theta = \pi/2$，得

$$|E_{max}| = \frac{60I_m}{R} |F_{max}(\theta)|_{\theta=\pi/2} = \frac{60I_m}{R} \tag{43}$$

而 $P_r = \frac{1}{2} I_m^2 R_r$，

将以上两式及式（42）代入式（19），即得

$$D = \frac{|E_{max}|^2 R^2}{60P_r} = \frac{120}{73.1} = 1.64 \tag{44}$$

Outline

天线阵

对称振子之类天线的主瓣宽度较宽，即方向性较弱，因此一般难以单独用作实用的天线。为了提高天线的方向性，通常将若干个单元天线（或称为阵元）按某种方式排列成天线阵。只要天线阵的各个阵元上电流的振幅和相位满足适当的关系，即可获得所需的辐射特性。根据不同的排阵方法，天线阵可分为直线阵、平面阵和立体阵。直线阵特别是均匀直线阵是最常见的天线阵形式，而直线阵中最简单的是二元阵。下面先介绍二元阵，然后再讨论多元阵的情况。

天线阵

二元阵

设有两个形式相同和取向也相同的天线单元（称为相似元）沿直角坐标系的轴排列，如图9所示。该两阵元的间距为 d，两阵元上的电流分别为 I_1 和 I_2，且 $I_2 = mI_1e^{j\xi}$，其中 m 为两阵元电流振幅的比值，且 ξ 为 I_2 超前于 I_1 的电流相位。假设观察点 p 位于远区，从阵元“1”和阵元“2”至 p 点的射线可近似认为平行，因此两个阵元在点 p 处辐射电场的方向都沿同一方向 (如 $\vec{a}_\theta$ 方向)，即 $\vec{E}_1$ 平行于 $\vec{E}_2$。

天线阵

二元阵

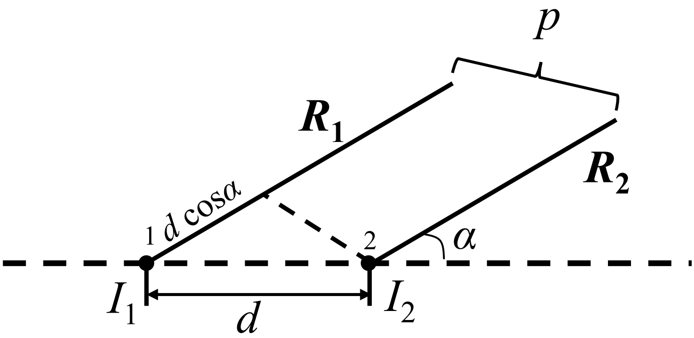


Figure 9: 二元阵

于是，二元阵在点 p 处的辐射电场可表示为

$$E = E_1 + E_2 = E_{m1}F_1(\theta,\varphi)\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} + E_{m2}F_2(\theta,\varphi)\frac{e^{-jkR_2}}{R_2} \tag{45}$$

因两个单元天线为相似元，故 $F_2(\theta,\varphi) = F_1(\theta,\varphi)$，对应于各单元天线本身的方向图函数，$E_{2m} = mE_me^{j\xi}$，$1/R_1 \approx 1/R_2$，而在相位因子中，则有 $R_2 \approx R_1 - d\cos\alpha$。于是，二元阵的辐射电场变成

$$E = E_mF_1(\theta,\varphi)(1 + me^{j\Psi})\frac{e^{-jkR_1}}{R_1} \tag{46}$$

天线阵

二元阵

式中 $\Psi=\xi+kd\cos\alpha$。所以，二元阵辐射场的电场强度的模值为

$$|E|=\frac{|E_m|}{R_1}|F_1(\theta,\varphi)||(1+me^{j\Psi})|=\frac{|E_m|}{R_1}|F(\theta,\varphi)| \tag{47}$$

由此可见，合成辐射场的方向图函数 $|F(\theta,\varphi)|$ 由两个因子的乘积决定。其中第一个因子 $|F_1(\theta,\varphi)|$ 为单元天线本身的方向图函数，称为天线阵的方向图函数的元因子；第二个因子 $|(1+me^{j\Psi})|$ 与阵元间的距离、阵元上的电流的振幅比及相位差 ξ 有关，称为天线阵方向图函数的阵因子，记为 $|F_a(\theta,\varphi)|$。因此，天线阵的方向图函数为

$$|F(\theta,\varphi)|=|F_1(\theta,\varphi)||F_a(\theta,\varphi)| \tag{48}$$

天线阵

二元阵

而归一化方向图函数为

$$|f(\theta,\varphi)| = \frac{|F(\theta,\varphi)|}{|F_{max}(\theta,\varphi)|} \tag{49}$$

一般地，$|F_1(\theta,\varphi)|$ 与 $|F_a(\theta,\varphi)|$ 在同一方向取得最大值，此时有

$$|f(\theta,\varphi)| = |f_1(\theta,\varphi)||f_a(\theta,\varphi)| \tag{50}$$

而 $|f_1(\theta,\varphi)| = |F_1(\theta,\varphi)|/|F_{1max}(\theta,\varphi)|$，
$|f_a(\theta,\varphi)| = |F_a(\theta,\varphi)|/|F_{amax}(\theta,\varphi)|$

由式（48）或（50）可得到如下结论: 在各单元天线为相似元的条件下，天线阵的（归一化）方向图函数等于（归一化）元因子与（归一化）阵因子的乘积。这就是方向图乘积原理。它对任意个相似元组成的天线阵都适用。

天线阵

二元阵

值得指出，在式（48）或（50）中方向图函数、元因子及阵因子均用球坐标系中的坐标角表示，这是为了统一表达，所得的表达式是方向图函数的一般式，便于实际应用。当单元天线为电流元或对称振子之类的天线时，我们知道，元因子 $|F_1(\theta,\phi)| = |F_1(\theta)|$ 中的角度 θ 是从其轴线算起的，它并不一定是球面坐标系中的极角 θ。为了避免混淆，通常可将元因子中的角度 θ 按阵子轴线的取向不同加以标记，并将改记后的角度的表达式归算到球坐标系中。具体地，当坐标系中阵子轴线沿轴 x 时，将原公式中的 θ 改记为 θ_x，而

$$\cos\theta_x = \vec{a}_R \cdot \vec{a}_x$$

应用第 1 章中式（1-105），可得

$$\cos\theta_x = \sin\theta\cos\phi \tag{51}$$

同理，当振子轴向沿 y，z 轴时，则有

$$\cos\theta_y = \vec{a}_R \cdot \vec{a}_y = \sin\theta\sin\phi \tag{52}$$

$$\cos\theta_z = \vec{a}_R \cdot \vec{a}_z = \cos\theta \tag{53}$$

这样，当阵元轴线沿 x,y,z 轴时，在原单元天线的方向图函数中代入上述关系即得 $|F_1(\theta,\phi)|$。

例如，当二元阵的阵元为半波对称振子且振子轴线沿 x 轴时，则有

$$|F_1(\theta,\phi)| = |F_1(\theta_x)| = \left|\frac{\cos(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi)}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}}\right| \tag{54}$$

对天线阵的阵因子 $|F_a(\theta,\phi)|$，同样需要将角度 α 归算到球坐标系中，即用球坐标系中的角度 (θ,ϕ) 表示。由于 α 表示从坐标原点向场点引出的射线与天线阵列中心连线所在坐标轴正向间的夹角，因此，当阵列中心连线沿 x,y,z 轴时，可将角度改记为 a_x,a_y 和 a_z。通过类似分析，可得

$$\begin{cases} \cos\alpha_x = \sin\theta\cos\phi \\ \cos\alpha_y = \sin\theta\sin\phi \\ \cos\alpha_z = \cos\theta \end{cases} \tag{55}$$

这样，当阵列中心连线沿某一坐标轴时，将阵因子中的 α 用式中的相应表达式代入即得 $|F_a(\theta,\phi)|$。

对等幅同相激励的二元阵，阵因子为

$$|F_a(\theta,\phi) = |1 + e^{j\Psi}| = 2|\cos(\phi/2)|$$

相应的归一化阵因子为

$$|f_a(\theta,\phi)| = |\cos(\Psi/2)| = |\cos(kd\cos\alpha/2)| \tag{56}$$

显然，对阵元间距 $d = \lambda/2$ 的等幅同相激励的二元阵，若阵列中心连线沿 x 轴，则

$$|F_a(\theta,\phi)| = |F_a(\alpha_x)| = 2|\cos(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi)|$$

对不等幅的二元阵，阵因子为

$$|F_a(\theta,\phi)| = |1 + me^{j\Psi}| = \sqrt{1 + m^2 + 2m\cos\phi} \tag{57}$$

天线阵

二元阵

而归一化阵因子为

$$|f_a(\theta,\phi)| = \frac{1}{1+m}\sqrt{1+m^2+2m\cos\phi} \tag{58}$$

例 8.5

自由空间中，三个沿轴排列，间距为 $\lambda/2$ 的电流元用于远区辐射电磁波，各电流元激励电流的相位相同，振幅比为 1:2:1，如图10所示。求该天线阵的归一化方向图函数，并画出 yOz 面的归一化方向图。

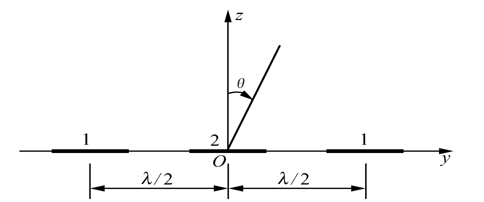


Figure 10: 沿 y 轴排列的三元阵

例 8.5

解：方法 I
因该阵列天线工作于远区，故总的辐射电场为

$$\begin{aligned} E &= E_1 + E_2 + E_3 = E_1(1 + 2e^{j\Psi} + e^{j2\Psi}) \\ &= E_{m1}/Re^{-jkR} \sin\theta_y (1 + 2e^{jkd\cos\alpha_y} + e^{j2kd\cos\alpha_y}) \\ &= E_{m1}/Re^{-jkR} F_1(\theta,\phi) F_a(\theta,\phi)/R \end{aligned}$$

于是，方向图函数为

$$\begin{aligned} |F(\theta,\phi)| &= |F_1(\theta,\phi)||F_a(\theta,\phi)| \\ &= \sqrt{1 - \sin^2\theta \sin^2\phi}[4|\cos(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi)|^2] \end{aligned}$$

例 8.5

所以，归一化方向图函数为

$$|f(\theta,\phi)| = \frac{F(\theta,\phi)}{|F(\theta,\phi)|_{max}} = \sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\cos^2(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi)$$

方法 II

将三个电流元分成两组，每组均为一个等幅同相二元阵，而两个等幅同相二元阵又可组成一个等幅同相二元阵。因两个等幅同相二元阵的归一化元因子为

$$|f_1(\theta,\phi)| = \sin\theta_y = \sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}$$

例 8.5

而归一化阵因子均为

$$|f_{a1}(\theta,\phi)| = |\cos\frac{1}{2}(kd\cos\alpha_y)| = |\cos\frac{1}{2}(kd\sin\theta\sin\phi)|$$

因此，每个等幅同相二元阵的归一化方向图函数为

$$|f'(\theta,\phi)| = |f_1(\theta,\phi)||f_{a1}(\theta,\phi)|$$

再将两个等幅同相二元阵组成一个新的等幅同相二元阵，其归一化的元因子为 $|f'(\theta,\phi)|$，而归一化的阵因子为

$$|f_{a2}(\theta,\phi)| = |f_{a1}(\theta,\phi)| = |\cos(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi)|$$

例 8.5

这样，总的三元阵的归一化方向图函数为

$$
\begin{aligned}
|f(\theta,\phi)| &= |f'(\theta,\phi)||f_{a2}(\theta,\phi)| \\
&= \sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\phi}\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\sin\phi\right)
\end{aligned}
$$

在平面 yoz 上，$\phi = 90°$, 故有

$$|f(\theta,\phi)| = |\cos\theta|\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)$$

yoz 平面上的归一化方向图如图11所示。
可以证明，通过天线阵的振子中心连线的任何平面内，天线阵的阵方向图函数的形式完全相同。换言之，阵方向图是环绕天线阵中心连线的旋转对称图形，这一特点可用于检验阵方向图的正确与否。

天线阵

二元阵

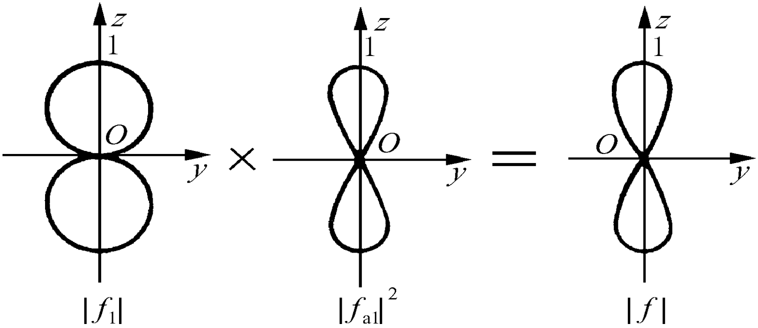


Figure 11: yoz 平面上的归一化方向图

导电体对天线的影响

前面有关单元天线和二元阵列天线的分析均是在假设天线处于自由空间中的前提下进行的，而实际天线均架设在地球表面或靠近接地的金属物体，因此地面或金属物体必然会影响天线的辐射和阻抗特性。

我们可以采用静电场中引出的镜像法来分析放置于地球表面或接地的金属体附近的天线，将地球表面或金属导体视为接地的理想导体。这样，实际天线的镜像位置上的镜像天线表面上的电荷必然和实际天线上的量值相等，符号相反。

尽管实际天线上的电荷和电流是交变的，但我们总可以根据某一瞬间天线上高频电流（即电荷）的分布来判断镜像天线上电荷的量值与符号。

1) 垂直、水平放置的电流元的镜像

电流元垂直放置于无限大接地理想导电平面上方，如图12所示。可将电流元看成是带正负电荷的电偶极子。因这一电偶极子放置于接地理想导电平面上方，为了用镜像电荷代替接地导电平面的影响，则在接地导电平面下方对称位置处应有电偶极子的镜像电偶极子，如图12(a) 所示。

天线阵

导电体对天线的影响

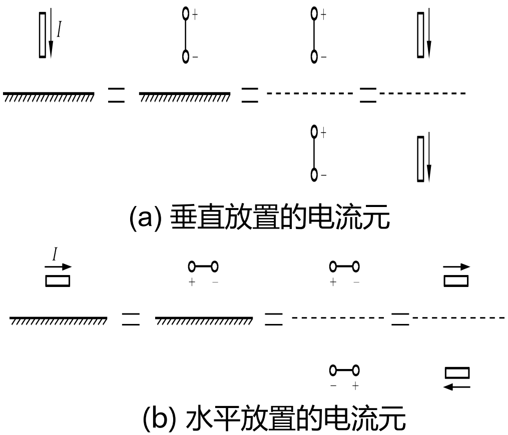


Figure 12: 垂直、水平放置的电流元的镜像

若将镜像电偶极子上的电荷用从正到负的电流线表示，则可看出，镜像电荷的方向与原电流元的方向相同，即镜像为正像。这样，移去接地导电平面后，原电流元和镜像电流元构成一等幅同相二元阵。换言之，分析垂直放置于接地导电平面上方的电流元就等效于分析自由空间中等幅同相二元阵。

根据同样的原理可知，水平放置于无限大理想接地导电平面上方电流元的镜像为负像，即镜像电流元的相位与原电流元的相位相反。因此原电流元与镜像电流元构成一等幅反相二元阵，如图12(b) 所示。

2) 倾斜放置的电流元的镜像

对如图13所示倾斜放置的电流元，只要将倾斜放置的电流元关于接地导电平面分解成水平及垂直放置的电流元，然后根据水平及垂直放置的电流元的镜像容易得到其镜像电流元，如图所示。

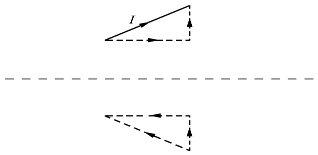


Figure 13: 倾斜放置的电流元的镜像

天线阵

导电体对天线的影响

3) 对称振子的镜像

通过类似的原理可知，水平架设于无限大理想接地导电平面上方的对称振子，不管长度如何，其镜像恒为负像，垂直架设于无限大理想接地导电平面上方的对称振子，不管长度如何，其镜像恒为正像，这同电流元的情况相同。

对于接地导电平面构成的角形域，置于角形域内天线的镜像也可用类似于静电场的镜像法中寻找多重镜像电荷的方法确定多重镜像天线，而角形域内天线的辐射场即为原天线与多重镜像天线的辐射场的叠加。

例 8.6

由两个半波对称振子组成二元天线阵，如图14（a）所示。其中间距为半个波长，天线离无限大理想接地导电平面的距离为 $\lambda_0/4$，并等幅同相激励。(1) 导出该天线阵归一化方向图函数；(2) 写出该天线阵在 xoz，yoz 和 xoy 面内的归一化方向图函数，并绘出 xoz 面内的归一化方向图。

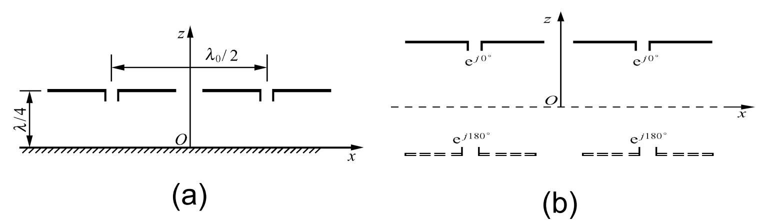


Figure 14: 放置于接地导电平面上方的二元天线阵

天线阵

导电体对天线的影响

例 8.6

解：采用镜像法求解。因水平天线的镜像是等幅反相的，故原二元阵同其镜像天线构成如图14(b) 所示的四元天线阵，此四元天线阵的归一化方向图函数可由天线的方向图乘积原理求得。导电平面上方原天线阵及其镜像天线阵各为一个等幅同相天线阵，其阵因子为

$$|f_{a1}(\theta,\phi)| = 2|\cos\frac{\psi_1}{2}| = 2|\cos(\frac{\pi}{2}\cos\alpha_x)| \quad = 2|\cos(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi)|$$

式中，$\psi_1 = \xi_1 + kd_1\cos\alpha_x$，$\xi_1 = 0$，$d_1 = \lambda_0/2$。

天线阵

导电体对天线的影响

例 8.6

原天线阵和镜像天线阵又构成一个等幅反相二元阵，其阵因子为

$$|f_{a2}(\theta,\phi)| = 2|\cos\frac{\psi_2}{2}| = 2|\sin(\frac{\pi}{2}\cos\theta)|$$

式中，$\psi_2 = \xi_2 + kd_2\cos\alpha_z$，$\xi_2 = 180°$，$d_2 = \lambda_0/2$。
因为半波对称振子的方向图函数（即四元天线阵的方向图函数元因子的模）为

$$|F(\theta,\phi)| = |F_1(\theta,\phi)||F_{a1}(\theta,\phi)||F_{a2}(\theta,\phi)|$$

天线阵

导电体对天线的影响

例 8.6

以及总的归一化方向图函数为

$$|f(\theta,\phi)| = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi)|}{\sqrt{1-\sin^2\theta\cos^2\phi}}|\cos(\frac{\pi}{2}\sin\theta\cos\phi)||\sin(\frac{\pi}{2}\cos\theta)| \quad (\theta \leq 90^\circ)$$

(2) 在 xoz 面内，$\phi = 0^\circ$，所以

$$|f(\theta)| = \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}\sin\theta)}{\cos\theta}|\sin(\frac{\pi}{2}\cos\theta)|$$

在 yoz 面内，$\phi = 90^\circ$，所以

$$|f(\theta)| = |\sin(\frac{\pi}{2}\cos\theta)|$$

天线阵

导电体对天线的影响

例 8.6

在 xoy 面内，$\theta = 90^{\circ}$，所以

$$|f(\theta)| = 0$$

则 xoz 面内的归一化方向图如图15所示。

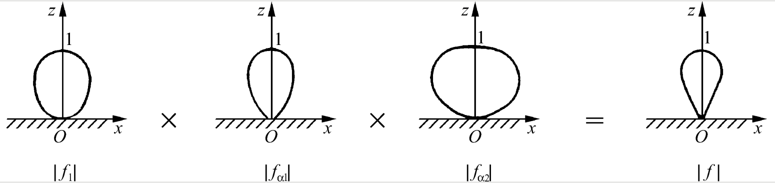


Figure 15: xoz 面内的归一化方向图

所谓均匀直线阵是指天线阵有 N 个相似元，相似元的中心排列在一直线上，相邻阵元的间距相等，各阵元的电流振幅相等以及电流相位按等差级数递增或递减的直线阵，如图16所示。

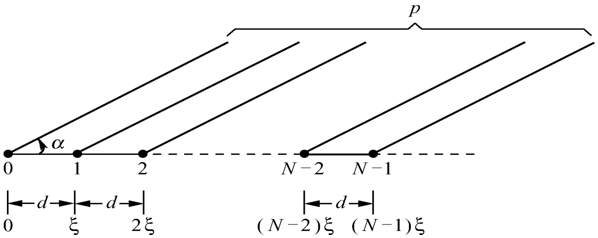


Figure 16: 均匀直线阵

由于观察点 p 处于远区，各射线均可看作平行，故合成的辐射电场可用各单元天线辐射电场的代数和表示，即

$$E = E_1 + E_2 + ... + E_N \tag{59}$$

设各单元天线上电流的相位递增，即

$$I_1 = I_m e^{j0^\circ}, I_2 = I_m e^{j\xi}, ..., I_N = I_m e^{j(N-1)\xi} \tag{60}$$

这样，均匀直线阵在远区 p 点辐射的电场变成为

$$E = E_1[1 + e^{j\Psi} + e^{j2\Psi} + ... + e^{j(N-1)\Psi}] \tag{61}$$

式中，$\Psi = kd\cos\alpha + \xi$。

于是，由式（61）知，均匀直线阵的阵因子为

$$|F_a(\Psi)| = |1 + e^{j\Psi} + e^{j2\Psi} + ... + e^{j(N-1)\Psi}| = \left|\frac{\sin(N\Psi/2)}{\sin(\Psi/2)}\right| \tag{62}$$

当 $\Psi = 0^\circ$ 时，各阵元在场点 p 产生的辐射场同相叠加，此时阵因子达到最大值，由上式有

$$\lim_{\Psi\to 0} |F_a(\Psi)| = N$$

因此，均匀直线阵的归一化阵因子为

$$|f_a(\Psi)| = \frac{1}{N}\left|\frac{\sin(N\Psi/2)}{\sin(\Psi/2)}\right| \tag{63}$$

根据均匀直线阵的归一化阵因子的一般表达式，可作出 $|f_a(\Psi)|$ 随 Ψ 的变化曲线。图17示出了 N 取六种不同值时情况变化曲线。

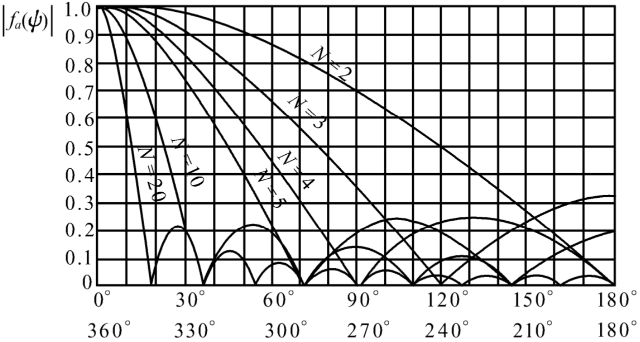


Figure 17: N 取六种不同值的情况

图18则示出时归一化阵因子 $|f_a(\Psi)|$ 随 Ψ 的变化曲线，此时图17中被“折迭”的横坐标已被“展开”。

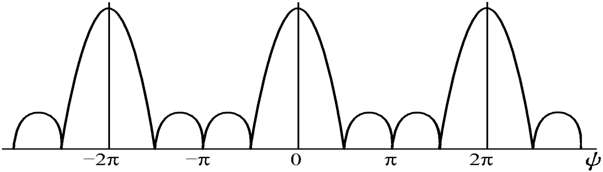


Figure 18: $N=4$ 元均匀直线阵的归一化阵因子的变化曲线

天线阵

均匀直线阵

由式（63）及图18可知，$|f_a(\Psi)|$ 是 Ψ 的周期函数，周期为 2π，即随 Ψ 的变化，$|f_a(\Psi)|$ 的变化曲线周期出现。因此，$|f_a(\Psi)|$ 除在 $\Psi=0$ 获得最大值外，在 $\Psi=\pm 2m\pi(m=1,2,...)$ 时也都取得最大值。在图 6.17 中，与 $\Psi=0$ 对应的波瓣称为主瓣；与 $\Psi=\pm 2m\pi$ 相对应的瓣称为栅瓣。为避免栅瓣出现，必须限制阵元间距 d 的大小，以使被限定在范围（一般取在 $[-\pi,\pi]$ 范围）内，否则若 $|f_a(\Psi)|$ 在 $\alpha=90^\circ$ 方向上出现最大值（即主瓣）时，在某些方向必会出现与主瓣幅度相等的栅瓣，这是不允许的。

分析可知，对端射阵（最大辐射出现在 $\alpha = 0°$，$180°$ 方向)，取 $d = \lambda/4$ 不出现副瓣；对侧射阵（最大辐射出现在 $\alpha = \pm 90°$ 方向)，则应取 $d = \lambda/2$ ，这可通过 Ψ 与 d 的关系得到。

利用式（63）还可确定均匀直线阵的主瓣方向、零辐射方向、第一副瓣电平以及主瓣零点宽度等，下面作简单介绍。

(1) 最大辐射方向（主瓣方向)

由式（63）可知，当 $\Psi = 0°$ 时，均匀直线阵获得最强辐射，即

$$kd\cos\alpha_{max} + \xi = 0 \tag{64}$$

天线阵

均匀直线阵

于是获得最大辐射方向角 α_{max} 为

$$\alpha_{max} = \arccos(-\frac{\xi}{kd}) \text{ 或 } \cos\alpha_{max} = -\frac{\xi}{kd} \tag{65}$$

显然，若要求 $\alpha_{max} = 0$ 或 π（此时均匀直线阵称为端射阵），则各单元天线上的电流相位与单元间距必须满足下式：

$$\xi = \mp kd \tag{66}$$

式中，“-”对应 $\alpha_{max} = 0°$；“+”对应 $\alpha_{max} = 180°$。若要求 $\alpha_{max} = \pm\pi/2$，则此时均匀直线阵为侧射阵，则由式（65）可知，此时 $\xi = 0$，即各单元天线上的电流不需要相位差。

此外，若要求最大辐射方向在任意角度 α 方向，则各单元天线上的电流与单元间距间的关系由式（65）确定。由此可见，改变各单元天线上激励电流相位的办法可以在天线不作机械转动的条件下实现天线阵波束在空间自由扫描，这种通过改变相邻单元电流相位实现波束扫描的天线阵，称为相控阵天线。

(2) 零辐射方向和第一副瓣电平

由式（63）可知，均匀直线阵的归一化方向图的零点发生在 $|f_a(\Psi)| = 0$ 处，即

$$\frac{N\Psi}{2} = \pm m\pi, (m = 1, 2, ...) \text{ 或 } \Psi = \pm\frac{2m\pi}{N} \tag{67}$$

任意两个相邻的零点之间，归一化阵方向图有一个次极大值即旁瓣出现，它们在 $|\sin(N\Psi/2)| = 1$ 处，即

$$\Psi = \pm\frac{(2m+1)\pi}{N}, m = 1, 2, ... \tag{68}$$

第一副瓣发生在 $m=1$，即 $\Psi=\pm 3\pi/N$ 处。当 N 很大时，由式 (63) 可知，第一副瓣的幅值为

$$\frac{1}{N}\left|\frac{1}{\sin(3\pi/(2N))}\right| \approx \frac{2}{3\pi} \tag{69}$$

可见，第一副瓣的幅值与主瓣的幅值之比为 21.22% 。换言之，第一副瓣电平为

$$20\log(0.2122/1) \approx -13.56\mathrm{dB}$$

这表明，对均匀直线阵，当第一幅瓣电平达到 $-13.56\mathrm{dB}$ 时，即使再增加天线阵元数也不能降低副瓣电平。

(3) 主瓣零点宽度

当均匀直线阵的阵元数很大时，天线阵主瓣的两个零点之间的宽度 $2\theta_0$ 可近似确定。令 Ψ_{01} 表示第一个零点，令式（67）中的 $m=1$，得

$$\Psi_{01} = \pm\frac{2\pi}{N} \tag{70}$$

对侧射阵（$\xi = 0$，$\alpha_{max} = \pi/2$），设第一个零点发生在 α_{01} 处，则两个零点之间的宽度为

$$2\theta_0 = \pm(\alpha_{01} - \alpha_{max}) \tag{71}$$

于是，$\cos\alpha_{01}=\cos(\alpha_{max}+\theta_0)=\psi_{01}/(kd)$，即 $\sin\theta_0=2\pi/(Nkd)$。所以

$$2\theta_0=2\arcsin(\frac{\lambda}{Nd}) \tag{72}$$

当 $Nd\gg\lambda$ 时，主瓣零点宽度为

$$2\theta_0=\frac{2\lambda}{Nd}$$

对端射阵（$\xi=-kd,\alpha_{max}=0$），设第一个零点发生在 $\alpha_{01}^{'}$ 处，因 $\psi_{01}=kd(\cos\alpha_{01}^{'}-1)$，故考虑式（70），有

$$\cos\alpha_{01}^{'}=\cos\theta_0=\frac{\Psi_{01}}{kd}+1=1-\frac{\lambda}{Nd}$$

天线阵

均匀直线阵

当 θ_0 很小时，$\cos\theta_0 \approx 1 - \theta_0^2/2$ ，此时的主瓣零点宽度变为

$$2\theta_0 \approx 2\sqrt{\frac{2\lambda}{Nd}} \tag{73}$$

这表明，均匀端射阵的主瓣零点宽度大于同样尺寸的均匀侧射阵的主瓣零点宽度。

在天线阵的设计中，降低天线阵的副瓣电平具有实际意义，因为对发射天线而言，副瓣的出现分散了天线阵的辐射能量；对接收天线而言，副瓣的出现会引入更多的噪声。

天线阵

均匀直线阵

然而，天线阵的主瓣宽度和副瓣电平是既相互依赖又相互对立的一对矛盾，天线阵的主瓣宽度越小，则副瓣电平越高；反之，主瓣宽度越大，则副瓣电平越低。均匀直线阵的主瓣宽度设计得很窄，但副瓣数目多，副瓣电平高。事实上，有一种天线阵能在主瓣宽度和副瓣电平间实现最优折中，这就是道尔夫-切比雪夫分布的天线阵。有关这种天线阵的讨论，读者可参阅其他文献。

Outline

考试注意事项

考试注意事项：

时间：2019 年 6 月 24 日 18 周星期一 10：30 - 12：30
地点：东中院 3 号楼 101 教室
考试方式：开卷 仅允许带教材和作业
请带计算器
答疑时间：6 月 21 号 17 周周五 14：00 - 17：00
答疑地点：电信楼群 1 号楼 313 房间
办公室电话：34208104
Email：gqhe@sjtu.edu.cn

感谢聆听!

主讲人: 何广强
地址: 上海交通大学
电子工程系
邮箱: gqhe@sjtu.edu.cn
主页: qnp.sjtu.edu.cn